

1.5.1 直線を書こう！

指導内容	学 習 活 動	備 考
直線	<ul style="list-style-type: none"> 直線を1本ひくと何か所にわかれますか？ 直線3本ひくと何か所にわかれるだろう。 たくさんになるようにひきましょう。 	<ul style="list-style-type: none"> 持ち物：コンパス 三角定規 分度器
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> ・直線 10 本ひくと何か所になるのか調べてみよう。 </div>		

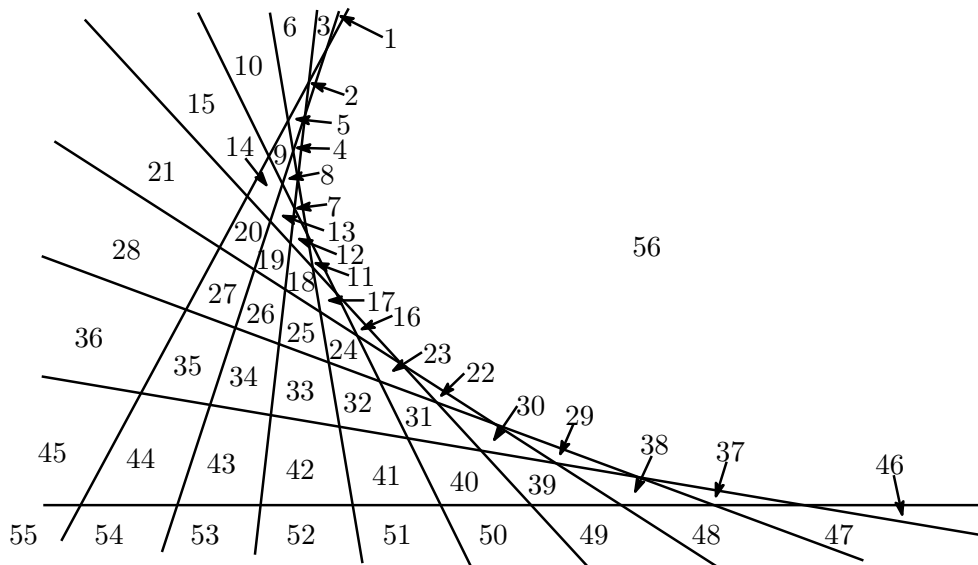
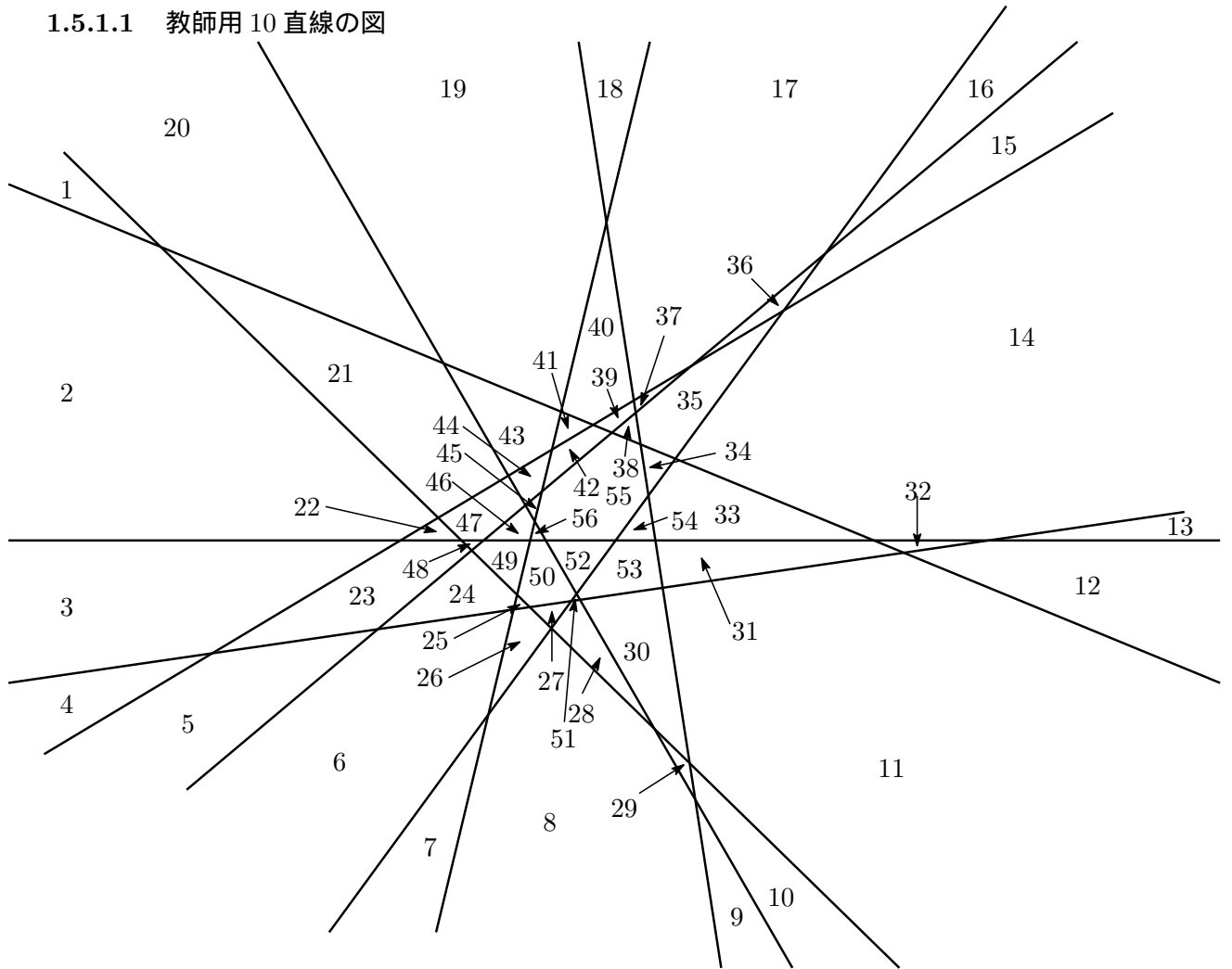
シンプルな授業である。特に準備するものはない。直線によって分けられる領域が何か所になるかを数えるだけである。しかし10本となるとかなり難しい。次頁の図と生徒ノートから感じてほしい。なお交点の数でも同様なことができるが、数えた数を書くところがノートにないため、やや達成感に欠ける。直線の本数によって分けられる最大数は以下の表の通りである。

直線の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	n
領域の数	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	...	$\frac{n^2 + n + 2}{2}$

生徒はただ線を引けばいいという程度の感覚で作業を始めるであろう。意識しなくても平行になっている直線があったり、交わっていない直線があったりして(中には11本ひいてしまう生徒もいるが...) なかなか目標の数値には達することはできないであろう。しかし2回、3回と挑戦していけば別れる領域の個数がどんどん多くなっていく。そう、引けば引くほど上手になっていくのである。

授業の最後には教師が黒板に書いた直線10本の図で、数えることによりまとめとすることができる。生徒と一緒に黒板に書いた直線10本でわかれた領域に番号を書いていき、最後56か所に分かれていることを確認するといいたろう。

1.5.1.1 教師用 10 直線の図



どの直線も平行でなく、3本の直線が1点で交わらない図を限られた時間の中で書くのは大変である。そのために下のような幾何学模様の図を紹介したらどうだろう。美術の教科書の中にもあり生徒も一度は見たことがあるだろう。

1.5.1.2 空間を平面で切り分ける領域の数

中学最初の基本図形教材であるが発展できることに気がついた。それは平面を空間に、直線を平面に置き換えることで、空間を平面で切り分ける領域の数に発展できる。3次元空間を平面で切り分けるときには n を平面の数として $f_3(n)$ を3次元空間における領域の数としたとき以下の漸化式になるというのである。

$$f_3(n) = f_3(n-1) + f_2(n-1)$$

ここで $f_2(n)$ というのは2次元の平面上で n 本の直線で分けられる領域の数である。これから $f_3(n)$ を求めると

$$f_3(n) = f_3(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k^2 + k + 2}{2} \right) + f_2(0)$$

$$f_3(0) = f_2(0) = 1 \text{ より}$$

$$f_3(n) = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

になる。具体的な数は

平面の数	0	1	2	3	4	5	6	7	...	n
領域の数	1	2	4	8	15	26	42	64	...	$\frac{n^3 + 5n + 6}{6}$

1, 2, 4, 8 と2の等比数列が並ぶが突然に $n = 4$ のとき 15 という数が出現する。この数列の名前は”ケーキ数”という。性質としてパスカルの三角形における左から4個の数の和になっている。最初の直線でわける領域の名前は”怠け仕出し屋の数列”だがネーミングが悪い。オンライン整数列大辞典の文の中にパンケーキを分割するとあった。パンケーキ分割数で統一されないかなって感じている。この数列はパスカルの三角形における左から3個の数の和になっている。ちなみに4次元空間における3次元の超平面で切り分ける領域 $f_4(n)$ は左から5個の数の和になっている。

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

人間成長してくると頭が固くなっていくが頭が柔らかいうちに考えさせることで空間のイメージを持つことができるのではと感じる。Wikipedia に15個の場合の図があった。参照してほしい。

(参考文献 数学セミナー 2019年4月号, 2020年5月13日追記及び校正)