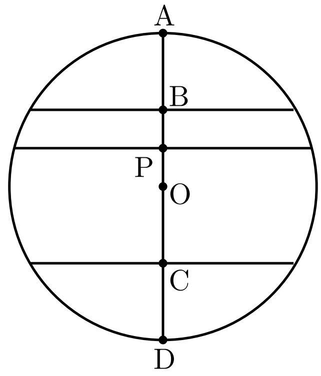
2.6.4　元気話.「同様に確からしい」

以下の問題に対して先生方はどのような答えを出すだろうか？ 解説を見る前に考えてください。

> 問. 円 O において，任意の弦を引いたとき，内接する正三角形の 1 辺の長さより大きくなる確率を求めなさい。

考え方 1.

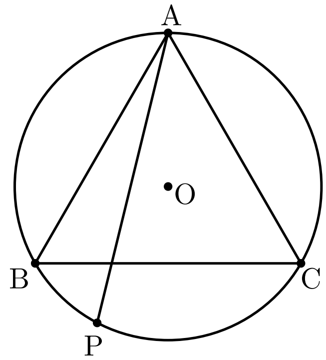
この確率を考えるとき平行な弦だけを調べても一般性は失われない。その弦が垂直な直径 AD と交わる点 P の位置によって弦の長さは決まる。半径 r の円において内接する正三角形の底辺の位置は中心 O から $\frac{1}{2}r$ の距離にあるので，直径 AD を 4 等分する点を B, O, C とすると，点 B と C の位置が内接正三角形の一辺と等しくなる位置になる。よって弦が線分 BC 内にあるとき弦の長さは内接正三角形の一辺より長くなる。なので，その確率 p は



$$p = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2}$$

考え方 2.

弦は円周上の 2 点によって決まる。よって弦の始点 A をどこにとっても一般性は失われない。終点 P のとり方によって弦の長さが決まる。いま点 A を頂点とする内接正三角形を ABC とすると，求める確率は点 P が $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ 上にあるときだから，その確率 p は

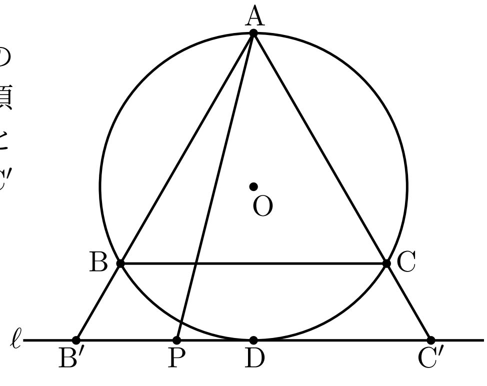


$$p = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{BC}}}{\text{円周}} = \frac{1}{3}$$

考え方 3.

考え方 2 と同様に弦の始点 A を固定させて考える。円周上の点 A を通る直径の他の円周上の点を D とする。また点 A を頂点とする内接正三角形を ABC とし，その辺 AB, AC の延長線と直線 ℓ との交点を B′, C′ すると，求める確率は点 P が線分 B′C′ 上にあるときだから，その確率 p は

$$p = \frac{\mathrm{B'C'}}{\ell\text{の長さ}} = \frac{\mathrm{B'C'}}{\infty} = 0$$



どうですか？ 何番の考え方が正解だと思いますか？ 正解は…ありません。というのは確率の大前提となる「同様に確からしい」の定義に反しているからなのです。「同様に確からしい」というのは起こりうる場合の数が有限個の集合からスタートしているためである。

無限個の集合の確率に拡張できないの？ と思う方もいるかもしれません。でもそうすると「同様に確からしい」をどうやって定義するのかが困ることになるのです。有限の線分の中にある無限の点をどのように同様に確からしくとることができるのでしょう？ この仮定が成立しないためいろいろな考え方の確率ができてしまうのです。ただし有限個で定義できる確率を無限個への拡張はできます。