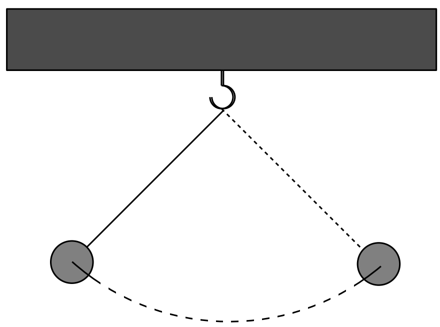
3.4.1　振り子実験

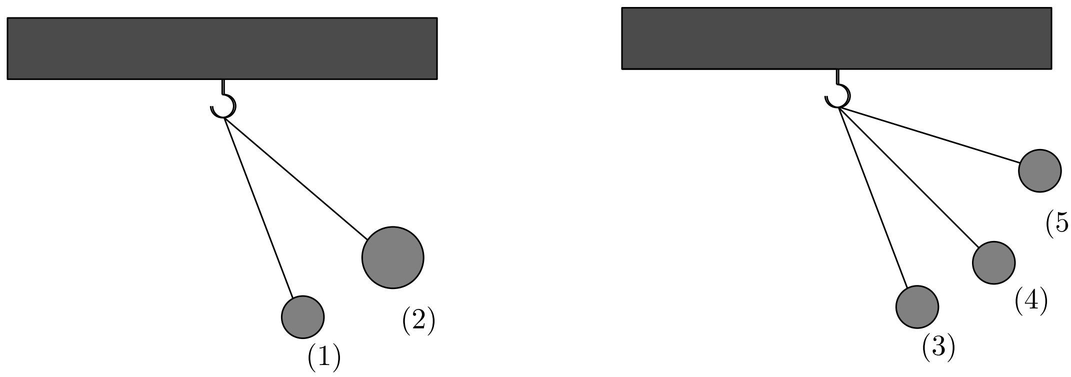
1. 学習教材名　2 乗に比例する関数
2. 本時のねらい
   - 振り子の周期と振り子の長さの関係が 2 乗に比例する関数関係にあることに気づかせる。
   - 実験データから周期の 2 乗と振り子の長さのグラフが比例関係にあることを知る。
3. 授業展開

指導内容	学　習　活　動	留　意　点
2 乗に比例 する関数 振り子実験	･振り子の実験を行います。 ･ここに長さ 25 ㎝の長さの振り子があります ･往復する時間を求めてみます ･周期が 2 秒になるときの長さはどれくらいになると思いますか？  ･周期と振り子の長さとはどんな関係があるのだろうか班ごとで実験をしてみよう ･グループごとの実習（約 25 分間） 長さをはかる担当 ストップウォッチ担当 記録担当 ･各班毎，記録をまとめてグラフに表してみよう。 (教師用レポート用紙参照)	･持ち物　電卓 ･準備　実験道具 （おもり，スタンド，糸，ストップウォッチ，ものさし） ･振り子の運動はその重りの質量と周期は無関係。 ･振り子の運動ははじめの高さと周期は無関係。 ･一回の振幅にかかった時間を周期という。 ･最初は教師の演示実験で行う。 ･振り子が 10 往復する時間をはかって周期を求めよう。 ･長さは各班毎工夫する。 ･机間巡視で班ごとの理解をふかめさせたい。 ･教材提示装置で班ごとの結果を表示する。 ･最後に教師用振り子で長さがわかっているときの周期を予想させる。

この実践は，厳密には 2 乗に比例する関数の逆関数なのだが，教材として深みがあるので取り上げる。やや指導が難しいので授業案もかなり詳しく載せておく。

最初に長さが 25 ㎝の振り子を用意しその 10 回の時間を計ることで周期を求めていく。

本時でおこなう振り子にはいろいろおもしろい性質がある。まず振り子の質量と周期とは全く関係がない。



上の図において (1), (2) どちらの重りでも重心までの距離が等しければ周期は同じになるのである。現実には同じ長さのまま大きな重りにつけ変えると，やや重心が外側に移るのでやや周期は長くなる。単純に考えれば振り子が重くなればなるほどその運動は速くなり，周期は速くなるのではと予想されるが現実には無関係である。

またもうひとつの興味ある性質としては，振り子のふりはじめの高さと周期との関係である。これは (3), (4), (5) どの位置から落としても周期は同じになるのだが…これも「高ければ高いほど周期が速くなるのでは？」「いやそれだけ距離 (振幅) が長くなるのだから逆に周期は遅くなるはずだ。」等いろいろな考えがでてきて，これはこれで詳しく振り子の特徴をつかむためには立派に１時間の授業ができるのである。しかし本時の目標とは離れるためここでは紹介だけにとどめ，支点と振り子までの長さと周期との関係を追求させていきたい。

最初に演示実験でおこなう長さ 25 ㎝での振り子の 10 回の時間は理論値では 10 秒となるはずであるが，そこは実験であるので正確にはでてこないと思われる。ここでは長さ 25 ㎝の振り子の周期が約１秒となること，そしてこれからおこなう実験の作業がわかればいい。あくまでも主体は生徒であるので，なるべく余分な説明をさけ生徒がおこなう実験時間を多くとっていきたいと思っている。ここで周期が約１秒になることを確認した後,「周期が２秒となるには長さはどれくらいにしたらいいのだろうか？」と問いかける。大部分の生徒は倍の長さの 50 ㎝ではないだろうかと予想すると思われる。そこで 50 ㎝で実験し，周期が２秒にならないことを確認した後「ではこの振り子の長さと周期との間にはどんな関係があるか調べてみよう。」と問いかけて実験に入っていきたい。

この演示実験後は生徒の班に分かれての実験となるが約 25 分ぐらいを実験時間としてとりたい。本時の授業においては振り子の長さは自由に班ごと変えられるので，お互いに相談しあい長さを決めることができる。実験の役割分担を通して互いのよさを認めあい,「振り子の長さと周期との関係をさぐる」という共通のテーマを通して，人間関係づくりの手助けとなればと感じている。

このことから本時でおこなう実験の理論値を調べると以下のようになる。

振り子の長さ (ℓ ㎝)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
周期 (T 秒)	0.63	0.89	1.10	1.26	1.41	1.55	1.67	1.79	1.90	2.00
(周期)^2(T^2 秒)	0.40	0.79	1.21	1.59	1.99	2.40	2.79	3.20	3.61	4.00
$\dfrac{\ell}{T^2}$	25.0	25.3	24.8	25.2	25.1	25.0	25.1	25.0	24.9	25.0

実験を通して表，グラフをまとめていきたい。最初は２乗に比例する関数とはわからなかっ

た生徒もグラフをまとめていくうちに，これは 2 乗に比例する関数だと気がついてくると思われる。授業時間を考えて充分な時間があれば教材提示装置を使って，各班ごとグラフのようすを紹介してやりたい。授業の最後に長さが与えられたときの周期を予想してからおこなう演示実験をやってまとめとしたい。

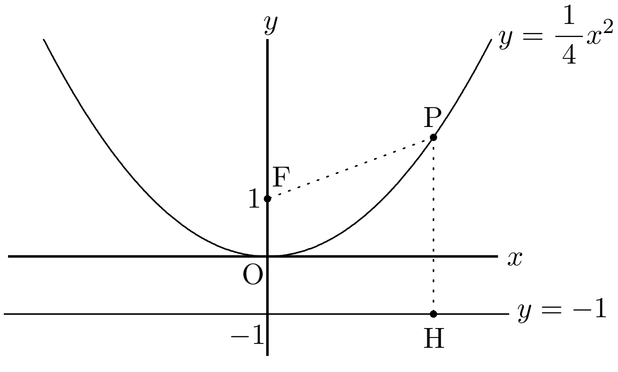
ところでこの振り子と周期との関係式は周期を T 秒，長さを ℓ ㎝としたとき $\ell = 25T^2$ となる。ただし ℓ の単位が$\overset{メートル}{}$のときは $\ell = \dfrac{T^2}{4}$ となる。この式はあくまでも近似された式であり参考までに公式を書いておくと $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ となる。ただし π は円周率 $3.141\cdots$，g は重力加速度で近似値としてよく $9.8\,m/s^2$ が用いられる。余談だがこの実験を正確に行うことでその場所における重力加速度の定数を求めることが可能である。

次頁の左のグラフが理論値からの周期と長さの関係のグラフで，右が (周期)^2 と長さの関係のグラフである。

生徒は自然と横軸に時間を取る習慣がついている。本時はこの時間において基本的には無理関数 ($y = a\sqrt{x}$) の逆関数としての 2 乗に比例する関数 ($y = ax^2$) を学んでいる。そう長さ (y) を決めると周期 (x) が決まるからである。2 乗に比例する関数の教材として落下実験があるがあまりにも時間が早すぎて，生徒にとっては煙に包まれた感じで取り組んでしまう。この振り子実験は具体性があり，生徒の達成感もある。教材としての難しさはあるが，選択数学または高等学校における一授業の教材としてとらえてくれたら幸せである。

3.4.2 元気話．焦点と準線

放物線の定義はご存じだろうか？ 放物線の図形的な定義は「1 定点 (焦点) と 1 直線 (準線) からの距離が等しい点の軌跡を放物線という。」となっている。分野は高校になるので忘れてしまった方も多いと思うが，教科書にパラボナアンテナの事が載っていたので放物線と焦点の事を思い出した。放物線 $y = ax^2$ の焦点の座標は $\left(0\,,\dfrac{1}{4a}\right)$ で準線は $y = -\dfrac{1}{4a}$ となる。具体的に話を進めよう。放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ の焦点の座標は ($0\,,1$) となる。そして準線は $y = -1$ となる。$y = \dfrac{1}{4}x^2$ のグラフと $y = -1$ の密接な関係。これは驚きである。

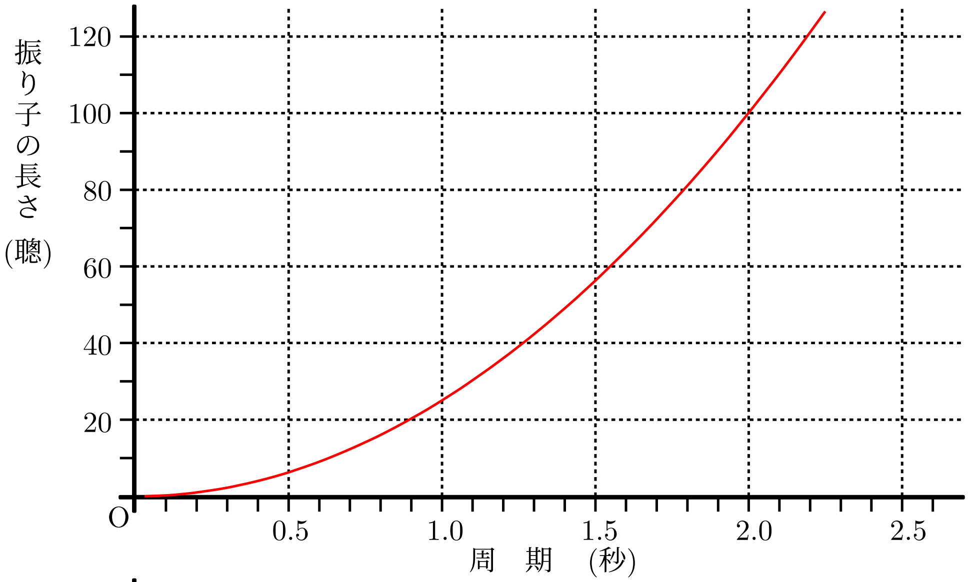


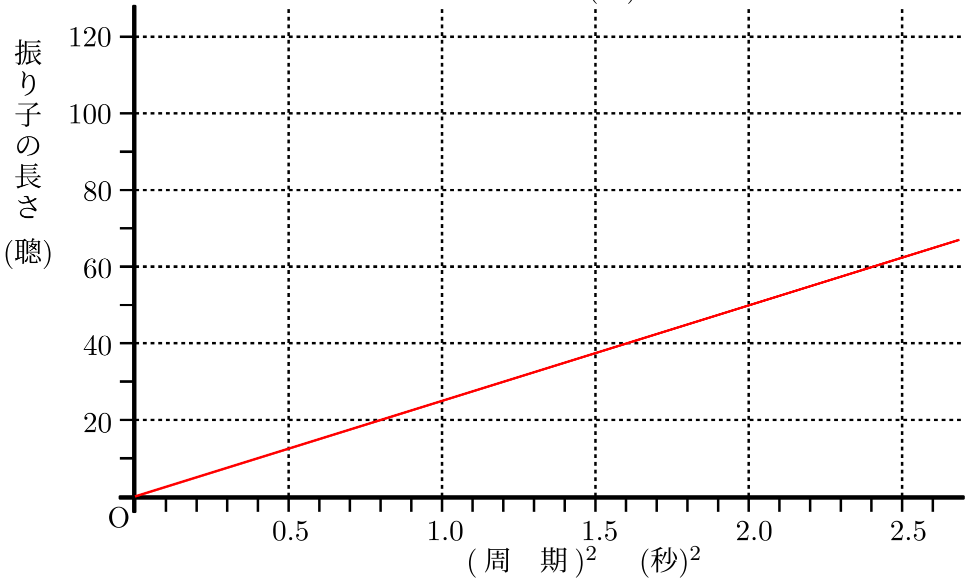
この放物線の定義から $y = ax^2$ を求めてみよう。動点 P の座標を ($x\,,y$) として焦点 F を ($0\,,1$)，準線を $y = -1$ として関係を式で表すと PH = PF となり，点 H の座標が ($x\,,-1$) となることから三平方の定理から $\mathrm{PH}^2 = \mathrm{PF}^2$ より

$$\begin{aligned}(y+1)^2 &= x^2 + (y-1)^2\\ y^2 + 2y + 1 &= x^2 + y^2 - 2y + 1\\ 4y &= x^2\\ y &= \frac{1}{4}x^2\end{aligned}$$

となって求めることができる。$y = \dfrac{1}{4}x^2$ と $y = -1$ は密接な関係を持っているのである。グラフを書いただけでは何も見えないがそこには必ず焦点と準線が存在するのである。

3.4.3　資料．教師用レポート用紙





実験の感想およびわかったこと

- 周期と振り子の長さは 2 乗に比例する関数関係になっている。
- 周期の 2 乗と振り子の長さは比例関係になっている。
- 25 ㎝のとき周期が 1 秒だったのが周期を 2 秒にするためには長さは 4 倍の 100 ㎝にしなくてはならない。
- こんな身近なところに 2 乗に比例する関数があったとはびっくりした。
- だいたいだが $\ell = 25T^2$ の関係になっている。
- 周期と振り子の長さのグラフがなめらかな曲線 (放物線) になった。
- どうして投げあげる高さと周期とは関係がないんだろう？