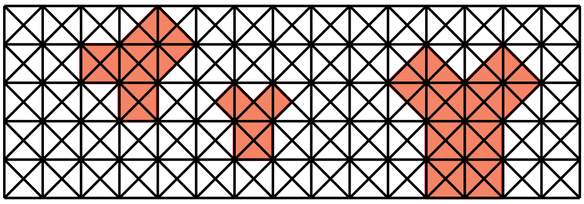
3.7.1　三平方の定理　～正方形埋め込みパズルⅠ，Ⅱ～

指導内容	学　習　活　動	備　考
三平方の定理Ⅰ ・直角三角形	・直角三角形の辺からできる正方形について考えよう。 (正方形埋め込みパズルⅠ)	・持ち物：はさみ のり
三平方の定理Ⅱ ・鋭角三角形 ・鈍角三角形	・鋭角三角形と鈍角三角形の辺からできる正方形について考えよう。 (正方形埋め込みパズルⅡ)	・持ち物：はさみ のり
三平方の定理Ⅲ	・直角三角形の辺の長さの関係を調べよう。	・持ち物：電卓 線引き (20 ㎝以上)

Ⅰについては有名な教材であるから知っている方は多いと思う。学校図書の教科書にも資料の (1) の図が載っている。パズルと教材を組み合わせたもので生徒の実態に関係なく楽しく授業を行うことができる。ただここで大切なのは教材の配列である。ピタゴラスの定理を面積の関係から導入するのはわかりやすくていいと思うが，実際には長さの関係に発展しなければならない。

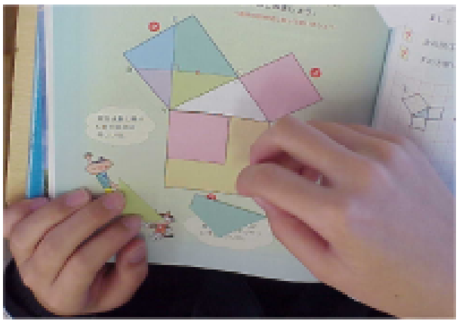
まず導入であるが，三平方の定理そのものを生徒が発見することはなかなか大変であるため，ピタゴラスが気がついたと言われている石畳の話から進めるといいだろう。ピタゴラスは合同な直角二等辺三角形で敷きつめられていた石畳を歩いていた時にこの定理を発見したと伝えられている。直角二等辺三角形の各辺からできる三角形の面積の関係に気がついたのである。そしてこの性質がすべての直角三角形で成り立つかどうかを考えていったのである。



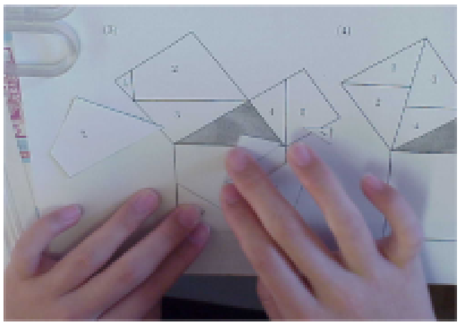
ピタゴラスの石畳

上の図で直角二等辺三角形の直角をはさんだ各辺が作る正方形の中にある直角二等辺三角形の数の和が，斜辺からできる正方形の直角二等辺三角形の数と等しいことに気がついたのである。教室の中にあるグラフ黒板に線を引いて作ってもいいし，この部分だけを板書してもいいだろう。

教師用資料として何も記入していないピタゴラスの石畳を用意した。(上図参照．資料は Web ページからダウンロードしてください。) 自分はいつもこの授業の時は，授業時間前に来る教科委員に拡大機で大きくした紙を黒板に貼っておくように伝え，「ピタゴラスは毎日通るこの道から今日から学習する三平方の定理を発見しました…」という話から始まって正方形のパズルに結びつけていく。この部分は話だけで終わってもいいが，次の正方形パズルに結びつけるためにマグネットをつかった教材を作り，後で行うパズルの簡単な例として黒板で確認するのもいいだろう。ピタゴラスと同じように直角二等辺三角形から一般の直角三角形に発展していくのである。



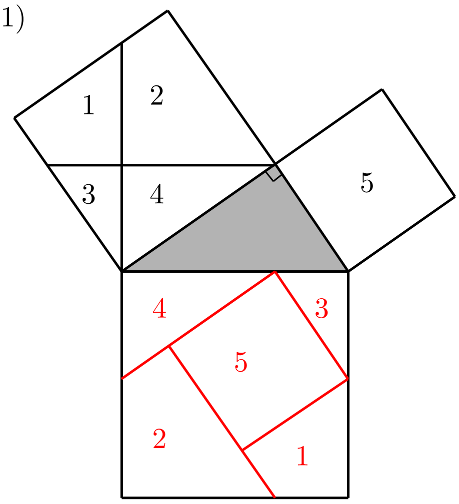
※教科書に載っている埋め込みパズル



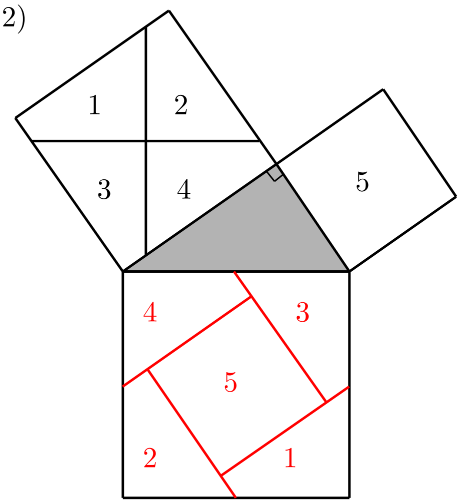
※自作の埋め込みパズル

3.7.2　資料．正方形埋め込みパズル I 解答

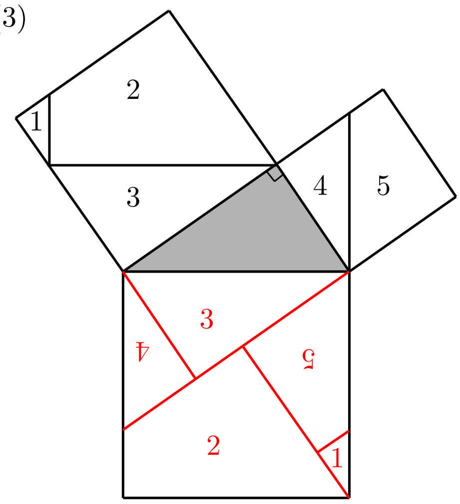
(1)



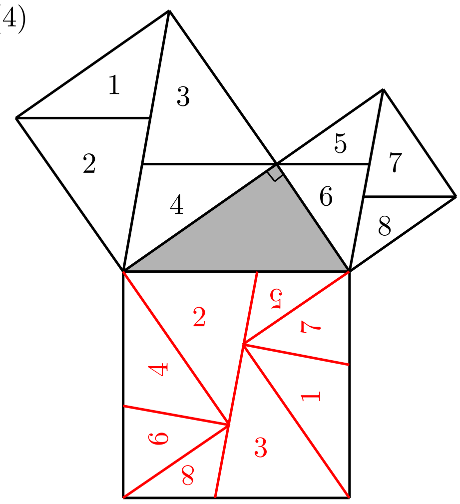
(2)



(3)



(4)

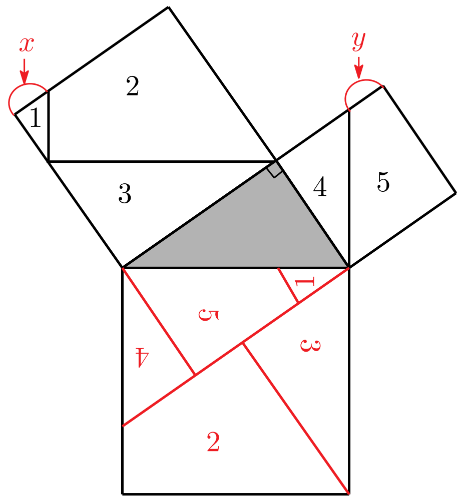


解答を載せたが，これを生徒に配布する必要はないと思います。あくまでも教師のための解答です。この正方形埋め込みパズルはそれだけでも楽しいが，2 つ組み合わせたパーツが一直線になるのか，長さは等しいのか，図形の性質を通して考えることによって証明にまで行きつくことができる。例えば (1) と (3) は直角三角形の斜辺の平行線とその垂線とで，(2) は正方形の対角線の交点を通る直角三角形の斜辺の平行線とその垂線とで分割している。そして (4) は

正方形の対角線と直角三角形の斜辺の平行線で正方形を分割している。正方形を分割している線に注目し，それぞれの図によって平行線の性質や三角形の内角，外角の性質を使ってこの角とこの角の和は 180° となり直線となって，この辺とこの辺の長さは等しくなる等，このようなことまで実際には考えさせたいが，なかなかそこまでの時間は授業中には取れないのが残念である。(4) は 8 つのパーツから作るので，やや難易度が高いように見えるが，実際は合同な図形 2 種類からできるパーツであるので，「4 つのパーツから正方形の半分の大きさにできないかな？」と困っている生徒に助言することができる。

資料だが，授業の時はパーツ切り取り用と貼付用の台紙あわせて 1 人 2 枚いるので生徒数の 2 倍の数が必要なので気をつけてください。

自分が気がつかない事を生徒は発見してくれる。(3) の図において 1 と 5 を組み合わせた図形は 3 と合同になることを生徒の活動から知りました。よって右図の場合も正解になります。



そこでもう一度 (3) の図を検証したら，どうやったら 1 と 5 がぴったりくっつくのか悩みました。一応証明を書いておきます。角度の問題はわかると思うので，1 の上部の長さを x，5 の上部を y として等しいことを証明してみましょう。1 , 2 , 3 からなる正方形の一辺の長さを a とし 4 , 5 からなる正方形の一辺の長さを b としましょう。

1 と 3 が相似なことより

$$x : b = (a - b) : a$$

$$x = \frac{(a-b)b}{a} \quad \cdots\cdots ①$$

3 と 4 が相似なことより

$$a : b = b : (b - y)$$

$$y = \frac{(a-b)b}{a} \quad \cdots\cdots ②$$

①②より

$$x = y$$

でも証明やって思ったのですが，三平方の発見当時は相似の概念はなかった。ということは別証明があるんでしょうね。でもわかりませんでした。ユークリッド幾何で証明できると思うのですが…。

と思って書いていたら別証明が見つかりました。5 の図形を 3 に当てはめて，残った部分が 1 と合同を言えばいいじゃないですか〜。1 辺とその両端の角で合同が言えることに気づきました。