3.7.6　ピタゴラス数

三平方の定理を研究していたらどうにも書きたくなってきたことがある。それが「ピタゴラス数」のことである。無理数を知らない (発見当時は $\sqrt{\ }$ という概念がなかった。) 人達がこの三平方の定理を見つけたときのその驚きをなんとか生徒に伝えたくなった。対象が中学生であるので 100 以下の整数の範囲で考えていきたい。

No.	互いに素なピタゴラス数	100 以下の要素数
①	(3, 4, 5)	20
②	(5, 12, 13)	7
③	(7, 24, 25)	4
④	(8, 15, 17)	5
⑤	(9, 40, 41)	2
⑥	(11, 60, 61)	1
⑦	(12, 35, 37)	2
⑧	(13, 84, 85)	1
⑨	(16, 63, 65)	1
⑩	(20, 21, 29)	3
⑪	(28, 45, 53)	1
⑫	(33, 56, 65)	1
⑬	(36, 77, 85)	1
⑭	(39, 80, 89)	1
⑮	(48, 55, 73)	1
⑯	(65, 72, 97)	1

表 1: 100 以下のピタゴラス数

この 52 個の数列の並びが当時の人達にどのように映ったのであろうか。神秘的な数として映ったに違いない。

さて生徒にピタゴラス数を発見しようと言っても，なかなか糸口が見えないであろう。そこで登場するのが乗法公式である。

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

この乗法公式を使って求めることができることを教えてあげるのである。使い方は

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$$

と形を変えて利用するのである。この場合 $2n+1$ は奇数なので，$2n+1$ が奇数の平方数になる時ピタゴラスの定理が完成する。

$2n+1 = 1^2$ のとき $n = 0$ となり (0, 1, 1) これは今正の数で考えているので不適。
$2n+1 = 3^2$ のとき $n = 4$ となり (3, 4, 5)
$2n+1 = 5^2$ のとき $n = 12$ となり (5, 12, 13)
$2n+1 = 7^2$ のとき $n = 24$ となり (7, 24, 25)

$2n+1=\ 9^2$ のとき $n=\ 40$ となり (9, 40, 41)
$2n+1=11^2$ のとき $n=\ 60$ となり (11, 60, 61)
$2n+1=13^2$ のとき $n=\ 84$ となり (13, 84, 85)
$2n+1=15^2$ のとき $n=114$ となり (15,114,115)となって 100 を超えてしまう。

では，それ以外の平方数はどうやって求めるのであろうか？ これは前にあげた形を少しずつ変形していき，

$$n^2+(4n+4)=(n+2)^2$$

この場合 $4n+4$ は偶数であるので，$4n+4$ が偶数の平方数になる時ピタゴラスの定理が完成する。

$4n+4=\ 2^2$ のとき $n=\ 0$ となり (0, 2, 2) これは今正の数で考えているので不適。
$4n+4=\ 4^2$ のとき $n=\ 3$ となり (3, 4, 5)
$4n+4=\ 6^2$ のとき $n=\ 8$ となり (6, 8, 10)
$4n+4=\ 8^2$ のとき $n=15$ となり (8, 15, 17)
$4n+4=10^2$ のとき $n=24$ となり (10, 24, 26)
$4n+4=12^2$ のとき $n=35$ となり (12, 35, 37)
$4n+4=14^2$ のとき $n=48$ となり (14, 48, 50)
$4n+4=16^2$ のとき $n=63$ となり (16, 63, 65)
$4n+4=18^2$ のとき $n=80$ となり (18, 80, 82)
$4n+4=20^2$ のとき $n=99$ となり (20, 99,101)となって 100 を超えてしまう。

社会の歴史と同じように，当時の人達と同じ目線で物事をとらえると言うことは大切だと感じる。無理数がない当時にとってこれらの数がいかに貴重なものとして扱われていたか，現代においては小学生に三平方の定理を指導する時はこのピタゴラスの数中心に指導することであろう。「平方根」のときには無理数の感動を，そしてこの三平方の定理では無理数がない世界で発見されたことを伝えて欲しい。数学の世界においては当時発見された定理が重要かどうかは時代が過ぎないとわからない場合が多い。ピタゴラスが発見した当時の本人の気持ちはどんなだっただろう？ たぶん自分の発見したものがそんなに重要なものとして感じていなかったのではないだろうか。それはあまりにもあてはまる整数の数の組が少ないことがあげられる。

追記

生徒の実態に応じては以下の式で考えさせた方がいい場合があると思います。

m , n を整数として $m>n$ とするとき

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

が成り立つ。したがって 3 辺の長さが m^2-n^2 , $2mn$, m^2+n^2 で表される三角形は m^2+n^2 を斜辺とする直角三角形である。この関係を調べると

m	n	m^2-n^2	$2mn$	m^2+n^2	No.
2	1	3	4	5	①
3	1	8	6	10	① ×2
4	1	15	8	17	④

5	1	24	10	26	② ×2
6	1	35	12	37	⑦
7	1	48	14	50	③ ×2
8	1	63	16	65	⑨
9	1	80	18	82	⑤ ×2
3	2	5	12	13	②
4	2	12	16	20	① ×4
5	2	21	20	29	⑩
6	2	32	24	40	① ×8
7	2	45	28	53	⑪
8	2	60	32	68	④ ×4
9	2	77	36	85	⑬
4	3	7	24	25	③
5	3	16	30	34	④ ×2
6	3	27	36	45	① ×9
7	3	40	42	58	⑩ ×2
8	3	55	48	73	⑮
9	3	72	54	90	① ×18
5	4	9	40	41	⑤
6	4	20	48	52	② ×4
7	4	33	56	65	⑫
8	4	48	64	80	① ×16
9	4	65	72	97	⑯
6	5	11	60	61	⑥
7	5	24	70	74	⑦ ×2
8	5	39	80	89	⑭
7	6	13	84	85	⑧

お気づきですか？ m と n の片方が奇数で、もう片方が偶数で互いに素の時に新しいピタゴラス数が見つかることを…。