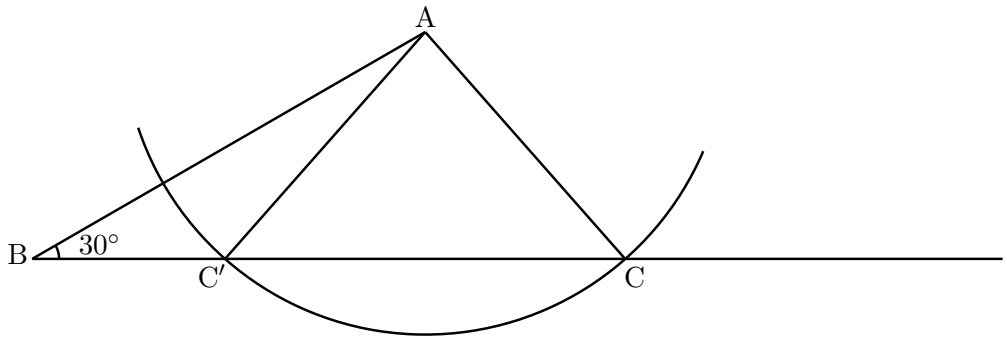
2.4.9　元気話．三角形の第 4 合同条件

中学校教師を長くやっていると，数学の本質を忘れてしまうときがあります。それは指導内容にあわせて数学に接しているためです。三角形の合同条件に第 4 合同条件があるのを知っていますか？ 先を急いでもいけません。三角形の合同条件の時に指導する問題からスタートしましょう。

問 1. AB = 6 ㎝ , AC = 4 ㎝ , ∠B = 30° の △ABC を書きなさい。



上の問題は中学 2 年の三角形の合同条件でよく出題される問題である。この図を例にとってみよう。一応数学の話なので図だけではごまかしもあるかもしれないということで，高校の三角比を利用しての値もあわせて書いておきます。

$b = 4$, $c = 6$, ∠B = 30° と正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ より

$$\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{3}{4}$$

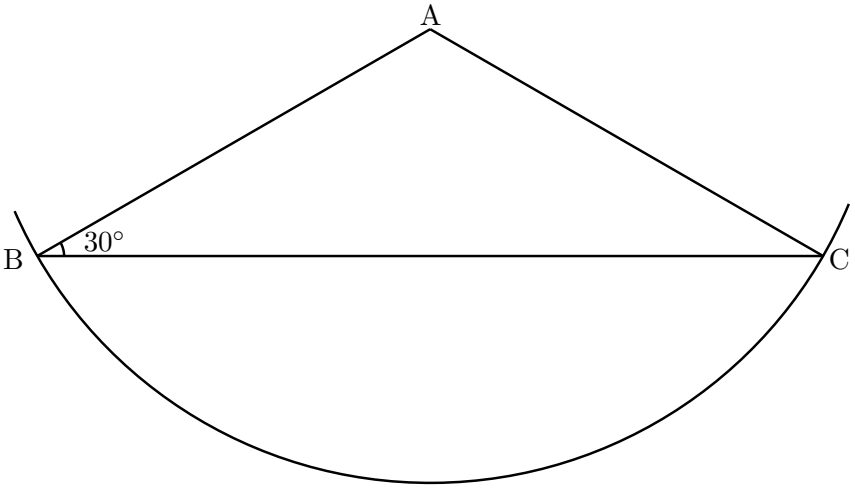
∠C ≒ 48.59 · · ·° , ∠C′ ≒ 131.41 · · ·°

図と同じように 2 つの角度が求められる。

参考までに BC の長さを求めてみると $\mathrm{BC} = 3\sqrt{3} \pm \sqrt{7}$ となり，約 2.55 ㎝と 7.84 ㎝となっている。

ではこの AC の長さを徐々に長くしてみよう。

問 2. AB = 6 ㎝ , AC = 6 ㎝ , ∠B = 30° の △ABC を書きなさい。



上の図を見れば一目瞭然で，二等辺三角形になることがわかれば他の合同条件も利用できる。

計算してみよう。

$b = 6$, $c = 6$, $\angle \mathrm{B} = 30^\circ$ と正弦定理より

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin C}$$

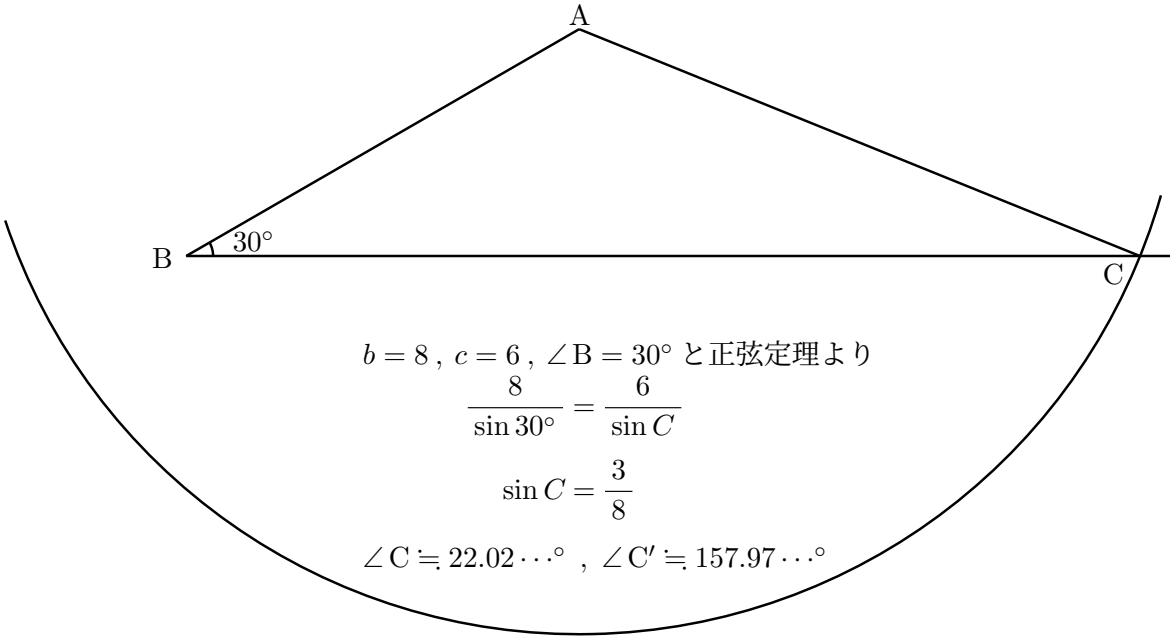
$$\sin C = \frac{1}{2}$$

$$\angle \mathrm{C} = 30^\circ \ , \angle \mathrm{C}' = 150^\circ$$

ここでも 2 つの値が求められるが，$\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C}' = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$ となり 2 つの内角の和で 180° となるため，$\angle \mathrm{C}' = 150^\circ$ の場合は点 B と点 C が重ねる場合であって不適 (三角形の作図が不能) であることがわかる。従って AB = AC となるこの場合には三角形は一つに決まり合同となる。

さらに AC の長さを長くしてみよう。

問 3. AB = 6 ㎝ , AC = 8 ㎝ , $\angle \mathrm{B} = 30^\circ$ の $\triangle \mathrm{ABC}$ を書きなさい。



$b = 8$, $c = 6$, $\angle \mathrm{B} = 30^\circ$ と正弦定理より

$$\frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin C}$$

$$\sin C = \frac{3}{8}$$

$$\angle \mathrm{C} \fallingdotseq 22.02\cdots^\circ \ , \angle \mathrm{C}' \fallingdotseq 157.97\cdots^\circ$$

図の中に計算を書いてしまったことをお許しをいただきたい。ここでも 2 つの値が求められるが，$\angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C}' \fallingdotseq 30^\circ + 157.97\cdots^\circ = 187.97\cdots^\circ$ となり 2 つの内角の和で三角形の内角の 180° を超えるため，$\angle \mathrm{C}' \fallingdotseq 157.97\cdots^\circ$ は不適であることがわかる。従って AB < AC となるこの場合には三角形は一つに決まり合同となる。

ここで大切なのは AB の長さよりも AC が長くなったときには三角形が一つに決まることである。そう，そこで三角形の第 4 合同条件が出現する。

三角形の第 4 合同条件
$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ において 2 つの対応する辺と，その 2 辺の長い方の対角が等しいならば $\triangle \mathrm{ABC} \equiv \triangle \mathrm{A'B'C'}$ となる。

中学校教員を長くやっているとこのような知識も薄くなってしまう。ただ単に「2 辺と 1 つの角という条件では三角形は 1 つに決まらないよ。」でもいいがその関係にある条件が加わると三角形が 1 つに決まる。このような知識を持って授業に望むことは重要だと自分は感じている。