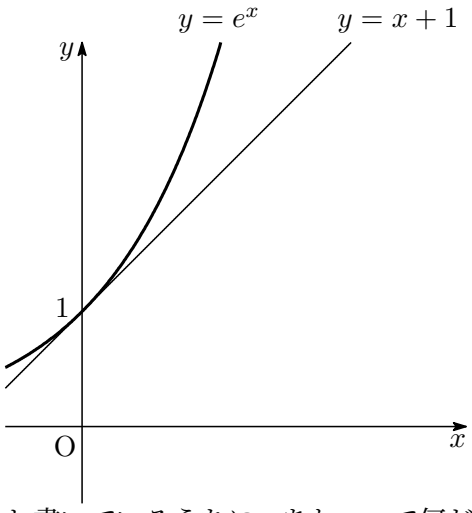
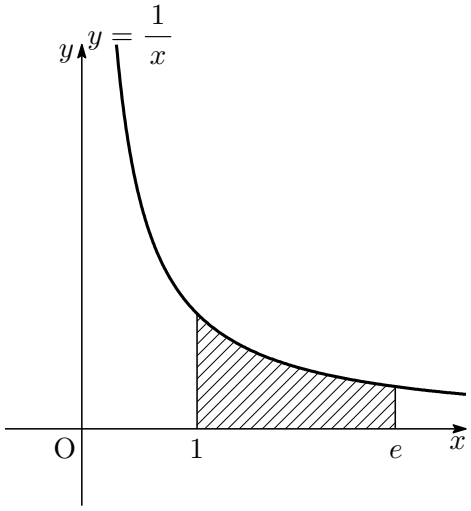
6.2　元気話．有理数・無理数・超越数

無理数の中に位置づけられている π と $\sqrt{2}$ の違いは知っていますか？ $\sqrt{2}$ は代数方程式 (有理数を係数とした方程式) で求められるが，π は代数方程式では出現しない。数学の世界では π と $\sqrt{2}$ は分数では表すことができない無限小数という点では一致しているが仲間ではないのである。(ちなみに π や e は超越数という。)





と書いているうちに，あれ e って何だっけ？ と疑問に思ったので調べてみた。高校の教科書には $x = 0$ における $y = a^x$ の接線の傾きが 1 になる数とあった。(左図)

ちなみに $y = 2^x$ において $x = 0$ における接線の傾きは $0.693147\cdots$，$y = 3^x$ は $1.098612\cdots$ になる。でもこれじゃ中学生にはわからない。

少し調べてみたら，反比例のグラフからの e の定義があった。$y = \dfrac{1}{x}$ において $x = 1$ から面積 (右図の斜線部分) が 1 になるときの x の値が e になる。これだったら中学生にもわかる。この値が π と同じで小数では表すことができない数になる。う〜ん，反比例のグラフも奥が深いなぁ〜。数学教師のために式を書くと

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{x}\,dx &= 1 \\
\Big[\log x\Big]_1^t &= 1 \\
\log t - \log 1 &= 1 \\
\log t &= 1 \\
t &= e
\end{aligned}$$

e はネイピア数またはオイラー数とよばれていて，$e = 2.7182818284590452353\cdots$ となる数である。