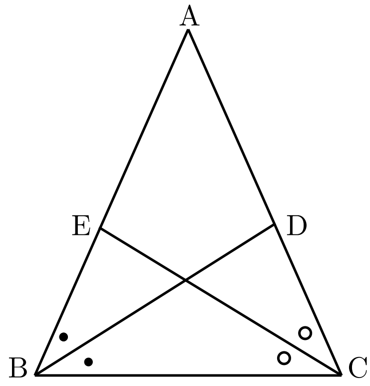
6.4 元気話．数学図形問題解答



フィールズ賞を受賞した広中平祐氏が中学校時代に悩んだ問題を紹介しておこう。皆さんも挑戦してみてください。

問. △ABC において ∠B の二等分線と AC との交点を D，∠C の二等分線と AB との交点を E とするとき，BD = CE ならば △ABC は二等辺三角形であることを証明しなさい。

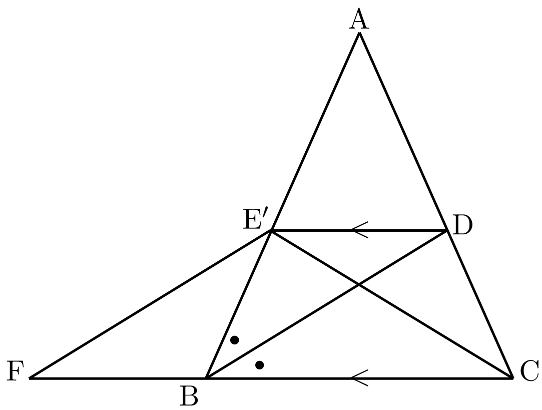
という問題です。

(広中平祐の数学教室　広中平祐著　サンケイ出版　1980 年)

ある数学の先生から「どうやったら証明できるの？」と聞かれたので自分の証明を書いておきます。

(証明)　点 D から BC に平行線を引き，AB との交点を E′ とする。
このとき BD = CE′ が成り立っているとき △ABC はどうなっているのだろうか？
検証してみよう。
∠DBC=∠E′DB (E′D//BC の錯角) · · · · · · ①
仮定より　∠DBC=∠E′BD · · · · · · ②
①②より　∠E′BD=∠E′DB
よって　△E′BD は二等辺三角形 · · · · · · ③
③より　E′B=E′D · · · · · · ④

CB の延長線上に E′D = BF なる点 F をとる。
四角形 E′FBD は仮定と作図から 1 組の対辺平行で等しいことより平行四辺形となる。
よって　△E′FC は仮定 BD = CE′ と平行四辺形の性質より二等辺三角形となる。
∠E′FC=∠E′CF (二等辺三角形の底角)
∠E′FC=∠FE′B (BF = BE′ の二等辺三角形の底角)
∠FE′B=∠E′BD (E′F//DB の錯角)
④より　∠E′BD=∠E′DB
∠E′CB=∠E′DB
4 点 E′, B, C, D は同一円周上にある。(同一円周上にある条件より)
あとは円周角の性質を使えば線分 CE′ が ∠C の二等分線ということがわかる。
そして元の三角形は二等辺三角形となる。



これで証明終わり？ と感じる人もいるかもしれない。BD = CE の候補となる点 E は 2 つしかないことは点と直線との関係から明白である。よってどちらか一方の点が二等分線という条件を満たすことが証明できれば，おのずともう 1 つの点は文意からはずれることとなる。これでいいかな〜中島先生〜。