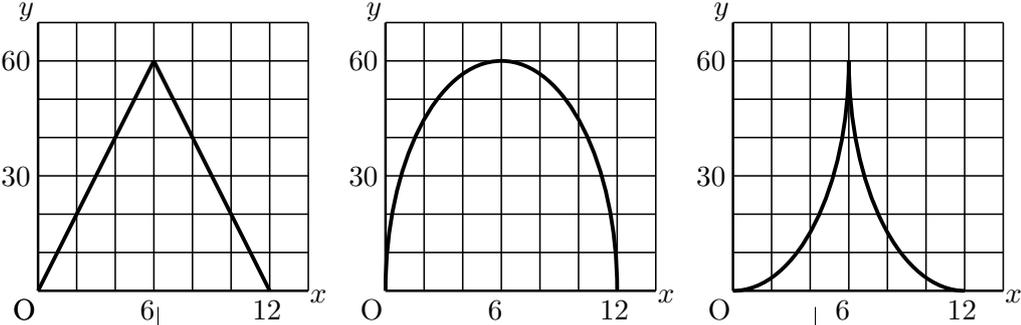
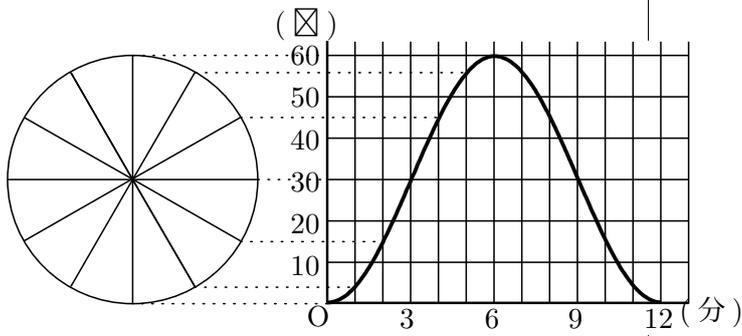
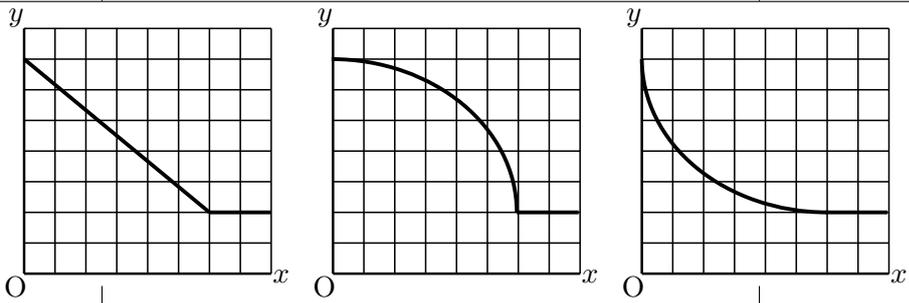


3.4 いろいろな関数

3.4.1 お湯の温度実験

指導内容	学 習 活 動	備 考
<p>いろいろな関数 (前時)</p> <p>予想する</p>  <p>実測する</p> <p>まとめる</p> 	<p>観覧車に乗ったことがありますか？</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>・直径 60 \square, 12 分間で一回転する観覧車のゴンドラの高さは時間とともにどのように変化しているだろうか。</p> </div> <p>・予想される生徒の考え</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>・1 分後, ゴンドラの高さはどうなっているの だろうか？</p> </div> <p>・$360 \div 12 = 30^\circ$ から高さがわかるはず。</p> <p>・グラフに表してみよう！</p>	<p>・準備 コンパス, 三角定規</p> <p>・予想用のグラフ用紙を配布する。</p>
<p>いろいろな関数 (本時)</p> <p>予想する</p>	<p>・ビーカーにお湯を入れるとお湯の温度はどうなりますか？</p> <p>・今日はビーカーに入れたお湯の温度がどのように下がっていくのか, その温度を測る実験をします。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>・最初のお湯の温度が 80°C だとして, どのように温度は下がっていくのか予想してみよう。</p> </div> <p>・予想される生徒の考え</p>	<p>・準備するもの ・温度計 ・ストップウォッチ ・お湯 ・ビーカー</p>

指導内容	学 習 活 動		備 考																																														
 <p>実験する</p>	<p>・各班ごと道具を用意して実験を開始してください。</p>		<p>・実験レポート用紙を配布する。</p>																																														
<table border="1"> <tr><td>時間(分)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>温度(°C)</td><td>80.0</td><td>78.8</td><td>76.0</td><td>73.2</td><td>71.0</td><td>68.9</td><td>66.9</td><td>65.2</td><td>63.4</td><td>62.0</td><td>60.5</td></tr> </table>	時間(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	温度(°C)	80.0	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5	<table border="1"> <tr><td>時間(分)</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>温度(°C)</td><td>59.0</td><td>57.9</td><td>56.5</td><td>55.3</td><td>54.2</td><td>53.1</td><td>52.2</td><td>51.2</td><td>50.3</td><td>49.5</td></tr> </table>		時間(分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	温度(°C)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5	
時間(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																						
温度(°C)	80.0	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5																																						
時間(分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																							
温度(°C)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5																																							
<p>まとめる</p>	<p>・実験が終わった班は片付けをして、レポートをまとめましょう。</p>		<p>・余裕を持って終われるように時間を確保する。</p>																																														
<p>次時</p>	<p>・次は駐車場料金問題に挑戦しよう！</p>																																																

3.4.2 授業の様子

今回行った実験の様子を生徒の写った授業写真で振り返ってみたい。理科室における生徒の並び方は特に指示しませんでした。自分達で理科室での座り方に自然となり授業に参加していました。2人～3人班で構成されていました。男女別々の班でした。



最後に板書です。気合いが入りすぎていつも以上に乱雑になってしまいました。板書も非常にシンプルですね。一度予備実験をして、自分の学校の理科室の様子(温度計のある場所、タイマーの操作等)をつかんでおけば大丈夫です。

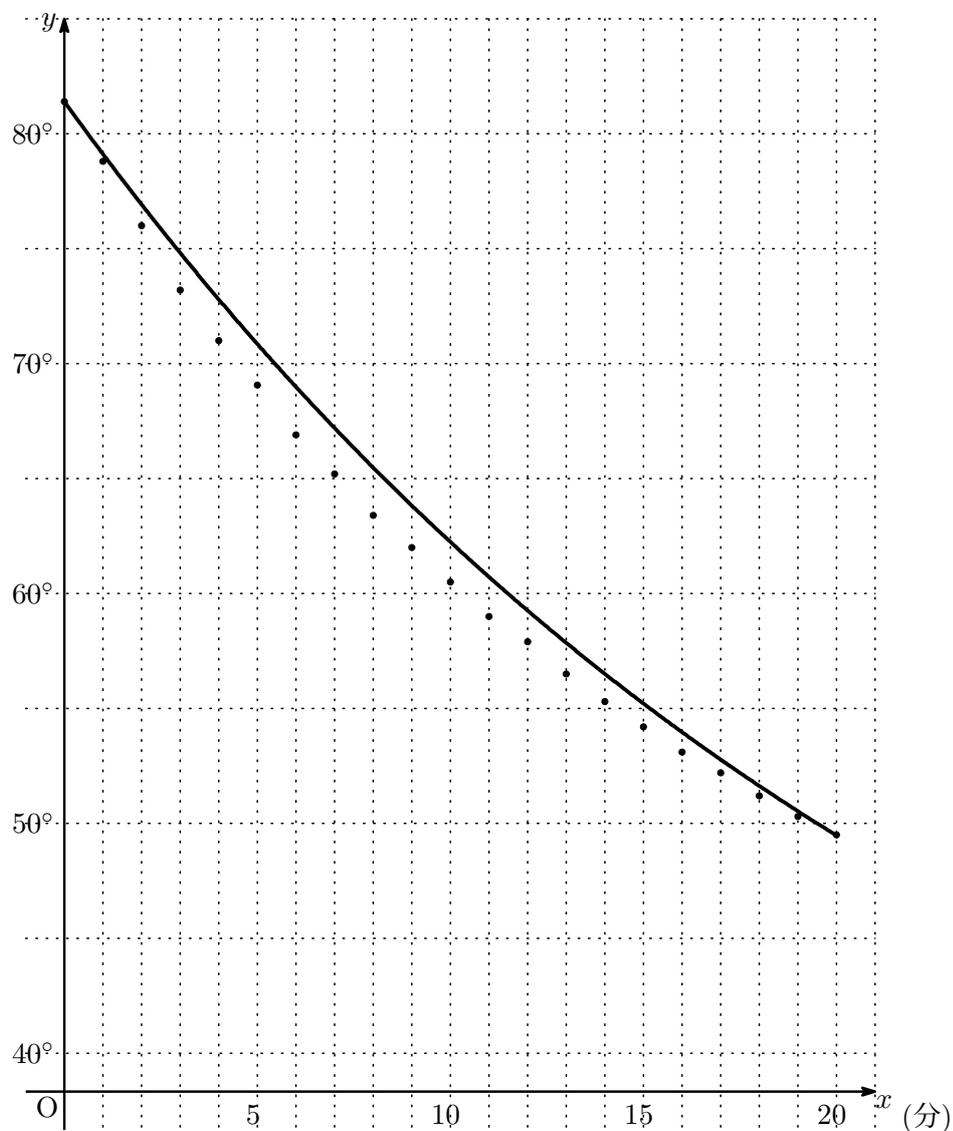


3.4.3 お湯の温度実験資料

今回行った時間とお湯の温度の関係が実際にはどのような関係になるのか、興味ある方のために資料として付け加えておきます。授業の準備のために行った予備実験のデータで説明しよう。まず理論値と実験結果を比べて書いてみよう。

時間(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
実験値(°C)	81.4	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5
理論値(°C)	81.4	79.1	76.9	74.8	72.8	70.9	69.0	67.2	65.5	63.8	62.2
誤差		0.3	0.9	1.6	1.8	2.0	2.1	2.0	2.1	1.8	1.7

時間(分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
実験値(°C)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5
理論値(°C)	60.7	59.3	57.9	56.5	55.2	54.0	52.8	51.7	50.6	49.5
誤差	1.7	1.4	1.4	1.2	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	



点がデータをプロットしたもので、実線が理論値の値である。やや誤差がはっきりと出てしまったが、しかし実験のデータは満足するレベルだと感じている。

このグラフを直線で結ぶ生徒はさすがにいないと思います。身近な現象に新しい曲線のグラフがあるんだという思いを抱かせれば授業は成功だと思います。

3.4.4 お湯の温度実験の解説

今回行った実験の詳細を記しておこう。

(1) 温度計



・100°Cまで計れる定番の温度計です。

(2) タイマー



・ストップウォッチの代わりにキッチンタイマーが理科室に用意してあったので今回はそれを使用しました。

(3) お湯



・保温型のポットだとお湯が冷めると思って、電動ポットにしました。実験の直前まで沸かしていました。

(4) ビーカー



・今回は一般的な200ccタイプのビーカーを使用しました。

目新しい器具はなく、生徒も一度は扱ったことのある器具ですので数学の教員以上に生徒の方が慣れていると思います。ここで自分なりに誤差を少なくした工夫をいくつか書いておきます。

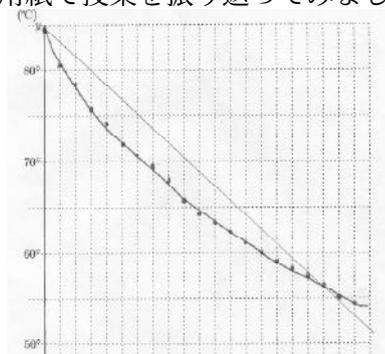
- ビーカーを生徒に配布する前に、ビーカーに一度お湯を入れて暖めておいた。(湯通しというやつです。)
- 温度の測り始めはちゃんと温度計が上がりきって、少し待ってから始めるように注意しておいた。

とりたてて専門的なことではありません。この実験は本当にシンプルです。

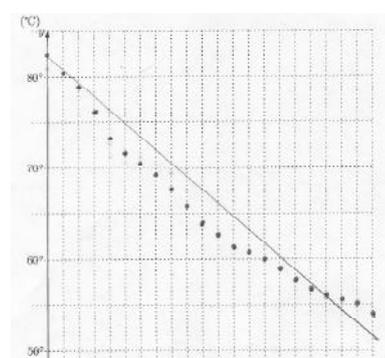
3.4.5 授業の表れ

直線で結ぶ生徒はそういないと思っていたのですが…、全滅状態でした。ほとんどの生徒が最初は直線を引いてました。生徒が提出したレポート用紙で授業を振り返ってみましょう。

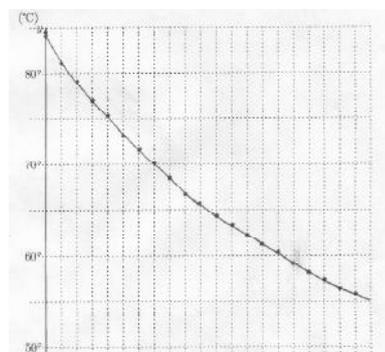
1. 右のグラフはある男子生徒のレポートです。この生徒は実験の終了後、点を打った後まず直線を引いたのです。納得いかなかったのか、その後各点を通るなめらかな曲線をフリーハンドで引きました。最初にまっすぐな線を引いてしまうってことは、やはり新しい事への抵抗は大きいんだなと感じました。



2. 今回のグラフはある女子生徒のレポートです。この生徒は実験の終了後、点を打った後、直線を引いてそのまま提出しました。しかし感想には「きれいなグラフになりました。」との言葉がありました。なめらかな曲線のグラフになることは感じているのだけでも、比例や1次関数の印象が強いのか、実験のグラフはまっすぐという意識が結果として直線になってしまったと感じました。



3. 今回の授業で一番きれいに仕上がった生徒のグラフを右に載せました。成績は中の上くらいの男子生徒です。感想には「最初は直線になると思っていたけど、なめらかな曲線のグラフになったのでびっくりした。」とありました。新しい事を実験を通して素直に受け入れることができた貴重な生徒だと感じました。



最後にレポートの感想を載せておきます。

- 比例 ($a < 0$) と2次関数の曲線 (原点は通らない) に似ていた。
- 直線で結ぶとガタガタだった。
- お湯の温度は最初は下がるスピードが速かったけどだんだんゆっくりになっていった。おもしろかった。
- 直線にはならなかったけど関数になった。数学と理科はつながっていることを知った。楽しかった！
- 予想では15分くらいから一定の温度になると思ったけどならなかった。もう少し長くやってみたかったです。楽しく実験ができました。
- お湯の温度がどんどん下がってはかるのが大変だったけどおもしろかった。

ニュートンの冷却の法則によれば、時刻 t におけるお湯の温度が室温より $x^{\circ}\text{C}$ 高いとすると、お湯の温度の下がる速さは、室温との温度差 x に比例し、次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -kx \\ \frac{1}{x} dx &= -kdt \\ \int \frac{1}{x} dx &= \int -kdt \\ \log x &= -kt + C \\ x &= e^{-kt+C} \\ x &= Ae^{-kt}\end{aligned}$$

この場合、はじめの温度は 81.4°C で、室温 24°C より 57.4°C 高かったから、 $t = 0$ のとき $x = 57.4$ の条件で解くと

$$x = 57.4e^{-kt} \dots (1)$$

20 分後のお湯の温度が 49.5°C でそのときの室温 24°C との差は 25.5°C だから、

$$25.5 = 57.4e^{-20k}$$

したがって、

$$e^{-k} = \left(\frac{25.5}{57.4}\right)^{\frac{1}{20}} \doteq 0.9602 \dots$$

これを (1) に代入すると

$$x \doteq 57.4 \times 0.9602^t$$

となる。

よってお湯の温度を $y^{\circ}\text{C}$ 、時刻を t としたときのこの場合の関係式は

$$y = 57.4 \times 0.9602^t + 24$$

となる。これが初期値と終値から求めることができる関係式である。(高等数学になってしまったことをお許し願いたい。納得いかない人もいるかと思ってまとめました。)