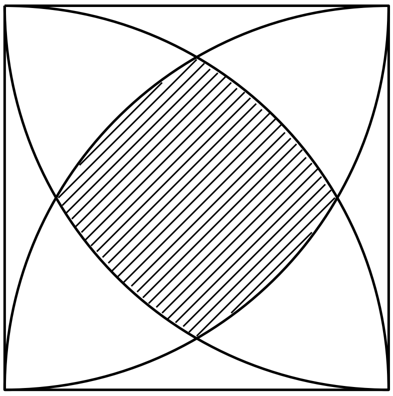
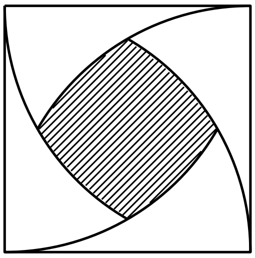
3.5.3　おうぎ形の面積・弧の長さ

「円」におけるおうぎ形に関する教材の指導は，自分はいつも円に関する面積や弧の長さを求める具体的な問題に置き換えて授業をしている。

問. 1 辺 10 ㎝の正方形において斜線部分の面積を求めなさい。



授業教材として考えた場合にはやや難しい。正三角形の高さが求められないと解けないので，「三平方の定理」を学習した後の教材となる。3 年生のまとめの学習あたりにどうだろう。しかしノーヒントでこの問題ではさすがに難易度が高いであろう。まず最初は周りの長さ ($\frac{20}{3}\pi$) を求めさせれば，中心角 30° の扇形に気がつくことから，やや求めやすくなる。

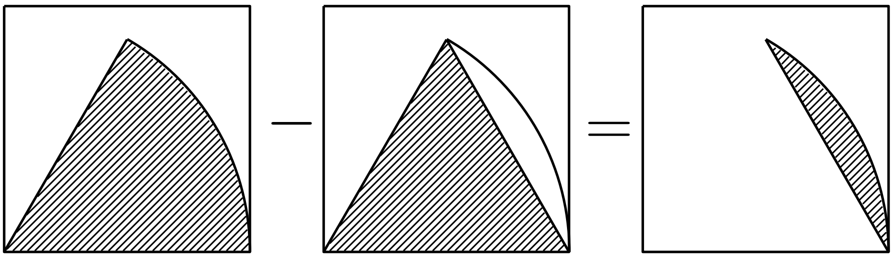


解答

上の図形の線を若干省略すると左図のようになる。求める斜線部分の面積は

(斜線部分の面積) = (正方形の面積) – (いちょう形) ×4

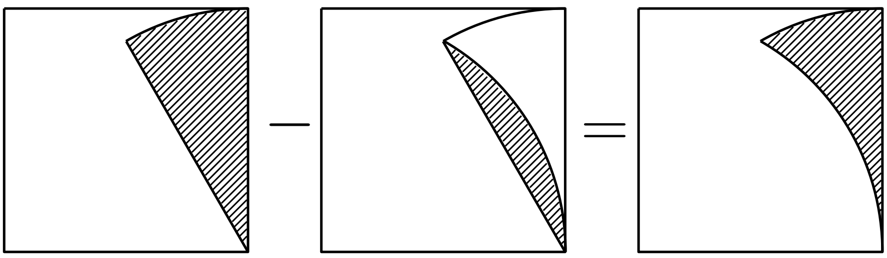
ということがわかる。(下図参照)



中心角 60° の扇形　　正三角形　　三日月形

正三角形の高さは $1:2:\sqrt{3}$ より $5\sqrt{3}$

よって三日月形の面積は $\pi \times 10^2 \times \frac{1}{6} - 10 \times 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}$



中心角 30° の扇形　　三日月形　　いちょう形

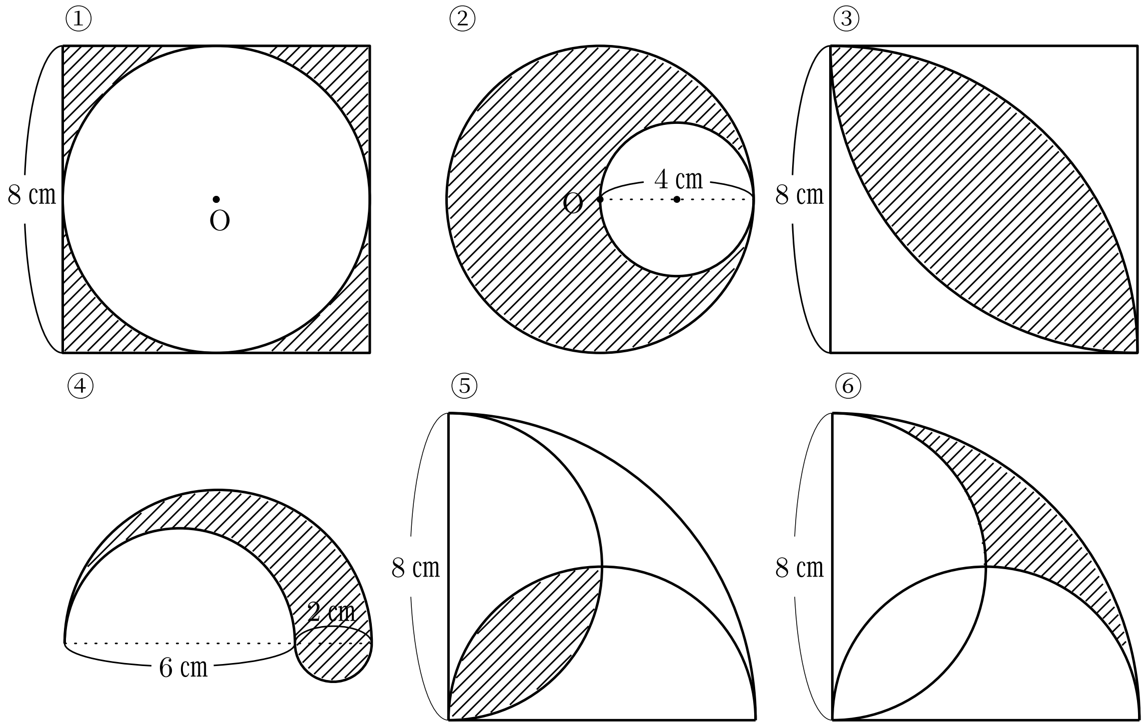
よっていちょう形の面積は $\pi \times 10^2 \times \frac{1}{12} - \left(\frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3}\right) = -\frac{25}{3}\pi + 25\sqrt{3}$

よって問題の斜線部分の面積は

(斜線部分の面積) $= 10^2 - \left(-\frac{25}{3}\pi + 25\sqrt{3}\right) \times 4 = 100\left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

生徒の実態に応じて授業課題は変えることができる。一般的な学校では下の③あたりが適度な難易度であろう。

問. 次の図において斜線部分の面積 (周の長さ) を求めなさい。



解答

① $S = 8^2 - \pi \times 4^2 = 64 - 16\pi$

② $S = \pi \times 4^2 - \pi \times 2^2 = 12\pi$

③ $S = \pi \times 8^2 \times \dfrac{1}{4} \times 2 - 8^2 = 32\pi - 64$

④ $S = \pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{2} - \pi \times 3^2 \times \dfrac{1}{2} + \pi \times 1^2 \times \dfrac{1}{2} = 4\pi$

⑤ $S = \pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{4} \times 2 - 4^2 = 8\pi - 16$

⑥ $S = \pi \times 8^2 \times \dfrac{1}{4} - \pi \times 4^2 \times \dfrac{1}{4} \times 2 - 4^2 = 8\pi - 16$

指導の方針としては 1 年生の復習と円に関する面積を求めることの習熟を図ることにあるが, 周りの長さを求める問題に置き換えても良いと感じる。①と②を出題することによって同類項の計算に違和感を覚えなくなるはずです。また長さを割りきれない 10 とかにするとやや計算が難しくなります。

余談ですけど⑤と⑥が等しくなるんですね。不思議な感じがしました。

周りの長さは答えだけ書いておきます。

① $(32 + 8\pi)$ cm　② 12π cm　③ 8π cm　④ 8π cm　⑤ 4π cm　⑥ 8π cm