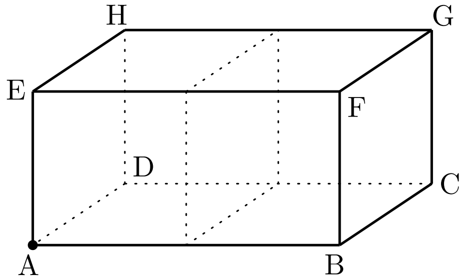
3.7.12 元気話．最遠問題

あるコラムに以下の問題が載っていました，まずは考えてみてください。

問. 立方体を 2 つつなげた直方体を考えます。一つの頂点を A としたとき，立体の表面を通る折れ線で A から一番離れている点はどこにあるのでしょう？

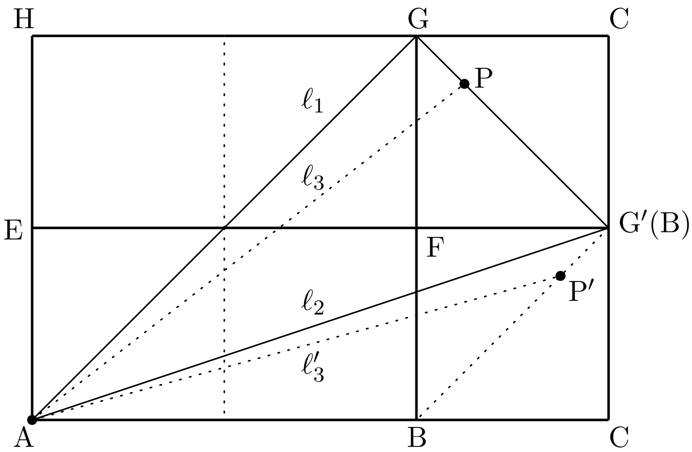


簡単そうですね。「点 G に決まってるじゃん！」という声が聞こえてきそうです。しかしそうではないのです。検証してみましょう。

正方形の一辺の長さを a とするとき，

$$\ell_1^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$
$$= 8a^2$$
$$\ell_1 = 2\sqrt{2}\,a = \frac{\sqrt{128}}{4}a$$
$$\ell_2^2 = (3a)^2 + a^2$$
$$= 10a^2$$
$$\ell_2 = \sqrt{10}\,a$$

通る辺 (EF か BF) によって長さが異なります。よって最短は ℓ_1 になります。



ここで点 G と点 B を結ぶ対角線上を動く動点 P を考えます。点 G から点 P までの横方向距離を t とすると点 A を原点としたときの G の座標は $\mathrm{G}(2a+t, 2a-t)$, $\mathrm{G}'(3a-t, a-t)$ と表すことができます。この点 P は G から B に対角線に沿って移動すると辺 EF と通る長さ (ℓ_1) は長くなりますが，辺 BF を通る長さ (ℓ_2) は短くなります。さてどこで同じになるのでしょうか，計算してみましょう。

$$\mathrm{AP}^2 = (2a+t)^2 + (2a-t)^2 \qquad \mathrm{AP}'^2 = (3a-t)^2 + (a-t)^2$$
$$= 8a^2 + 2t^2 \qquad = 10a^2 - 8at + 2t^2$$

$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AP}'^2$ より $8a^2 + 2t^2 = 10a^2 - 8at + 2t^2$

$$8at = 2a^2$$
$$t = \frac{1}{4}a$$

よって $\ell_3 = \dfrac{\sqrt{130}}{4}a$

この問題が授業で使えるかは各先生方に考えてもらうとして，授業中の話題としては取り上げてもいいかな？ って感じました。

この問題はマーチン・ガードナーの「現代の娯楽数学」の中に載っていて，発見者は日本人数学者小谷善行 (東京農工大学教授) だそうです。(「数学のひろば」大日本図書発行より)