6.15　元気話．ガウス素数

素数の指導が新しい教育課程では小学校に移りました。移ったのなら素因数分解まで移せばいいのに…。まぁいいや，今回の話題は素数の 2 と 3 の違いです。

素数には 2 つのグループがあるのです。

$2, 5, 13, 17, 29, 37, \cdots$ と $3, 7, 11, 19, 23, 31, \cdots$

となります。この 2 つの素数の違いは何なんでしょう。

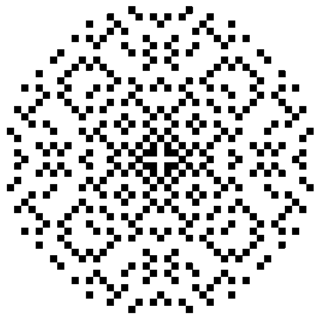
一つのグループは 2 つの平方数の和で表すことができて，他方はできないグループです。

$2 = 1^2 + 1^2, 5 = 1^2 + 2^2, 13 = 2^2 + 3^2, \cdots$

このことがどんな影響があるのでしょう？ 実は 2 つの平方数の和で表せるということは虚数 i を使って複素数の範囲で因数分解できることを表しているのです。具体例で見ていきましょう。

$$
\begin{aligned}
2 &= (1+i)(1-i) \\
5 &= (2+i)(2-i) = (1+2i)(1-2i) \\
13 &= (3+2i)(3-2i) = (2+3i)(2-3i) \\
17 &= (4+i)(4-i) = (1+4i)(1-4i) \\
29 &= (5+2i)(5-2i) = (2+5i)(2-5i)
\end{aligned}
$$

ガウス平面上のガウス素数



となります。2 つのグループのどちらかに入るかはその素数を 4 で割った余りで判断できます。余りが 1 または 2 のときには平方数の和で表すことができ，余りが 3 のときは表すことができません。この複素数の範囲でも因数分解できない素数を「ガウス素数」といいます。

中学生には話すことできない性質ですけど，虚数を習った高校 2 年生位だったら興味ある話題として写るかな？

6.15.1　元気話．素数魔方陣

おまけで，この素数を調べていく段階で素数だけを使った魔方陣にお目にかかりました。これなら中学生にもわかるかなぁ〜。

3×3 の素数魔方陣

17	89	71
113	59	5
47	29	101

(和は 177)

4×4 の素数魔方陣

13	43	59	5
23	19	37	41
53	47	17	3
31	11	7	71

(和は 120)

4×4 の魔方陣の方が総和が小さくなるのが目を引きます。3×3 と 4×4 の場合を一つずつ示しましたが，この素数魔方陣はまだたくさんあります。