

6.16 元気話 . 平方数からできる整数

問 自然数を異なる (同じ数でなければ何種類でも可) 平方数の和 (0 を含む) で表します。1 は $1^2 + 0^2$ と表すことができます。2 は表すことができません。このように考えていくとき, 表すことができない最大の整数を答えなさい。

調べていきましょう。

- (1) 平方数は必ず 0 を用いて表すことができますから削除します。(例 . $4 = 2^2 + 0^2$)
- (2) 1 を除く平方数の 1 大きい数は表すことができますから削除します。(例 . $5 = 2^2 + 1^2$)
- (3) 1, 2 を除く平方数の $4(2^2)$ と $5(2^2 + 1^2)$ 大きい数は表すことができますから削除します。(例 . $13 = 3^2 + 2^2$, $14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$)
- (4) 同様に 1, 2, 3 を除く平方数の $9(3^2)$, $10(3^2 + 1^2)$, $13(3^2 + 2^2)$, $14(3^2 + 2^2 + 1^2)$ 大きい数は表すことができますから削除します。
- (5) 同様に 1, 2, 3, 4 を除く平方数の 16, 17, 20, 21, 25, 26, 29, 30 大きい数は表すことができますから削除します。
- (6) 同様に 1, 2, 3, 4, 5 を除く平方数の (25, 26, 29, 30), 34, 35, 38, 39, 41, 42, 45, 46, 50, 51, 54, 55 大きい数は表すことができますから削除します。(以下 () 内の重複する数は省略します。)
- (7) 同様に 1, 2, 3, 4, 5, 6 を除く平方数の 36, 37, 40, 49, 52, 53, 56, 57, 61, 62, 65, 66, 70, 71, 74, 75, 77, 78, 81, 82, 86, 87, 90, 91 大きい数は表すことができますから削除します。
- (8) 同様に 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 を除く平方数の 58, 59, 63, 69, 79, 83, 84, 85, 88, 89, 94, 95, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 110, 111, 114, 115, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 130, 131, 135, 136, 139, 140 大きい数は表すことができますから削除します。
- (9) 同様に新規に削除される数は 64, 68, 73, 80, 93, 98... となります。

この結果残った整数を順に書き出してみます。

2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 108, 112, 128

の数です。結果 31 個の数が表すことができません。そして最大の数は 128 です。(暇があったらちゃんとした証明を書きたいと思っています。)