

2017年10月13日

完全数の話

Version 1.0

By Shigemasa Ozawa

数	内容	数	内容	数	内容
1	$\sigma(n) = n$ となる唯一の数	26	完全数の約数の個数	51	各位の和が完全数になる完全数番目の数
2	$\sigma(n)$ の意味	27	完全数と立方	52	6 の長さの循環節をもつ数
3	最小のメルセンヌ素数 ($p = 2$)	28	完全数 (ユークリッド原論より)	53	メルセンヌ数 ($p = 53$)
4	完全数と超完全数	29	完全数 ± 1	54	10 番目の完全数
5	約数の和が完全数になる数	30	$n \times \sigma(n)$ の数	55	7 番目の完全数と各位の和
6	最小の完全数	31	3番目と8番目のメルセンヌ素数 ($p = 5, 31$)	56	約数の和が倍積完全数の約数の和になる数
7	2 番目のメルセンヌ素数 ($p = 3$)	32	完全数になれなかった数②	57	メルセンヌ素数の指数部と $n^2 + n + 1$
8	倍積完全数	33	完全数の素因数の和	58	約数の和の求め方
9	$2^n + 1$ の数とフェルマー素数	34	完全数の和	59	メルセンヌ数 ($p = 59$)
10	中心つき九角数	35	完全数の数式考察③	60	完全数の数式考察⑤
11	メルセンヌ数 ($p = 11$)	36	完全数の数式考察④	61	9 番目のメルセンヌ素数 ($p = 61$)
12	完全数の連続約数の和が完全数になる数	37	9 番目の完全数	62	完全数の素因数の積
13	5 番目のメルセンヌ素数 ($p = 13$) と完全数	38	メルセンヌ素数をつくる指数考察	63	メルセンヌ数
14	4 番目の完全数 8128 の約数の個数	39	12 番目メルセンヌ素数とリュカ	64	超完全数一覧
15	三角数	40	完全数の数式考察⑤	65	11 番目の完全数 ($p = 107$)
16	超完全数 $\sigma^2(n) = 2n$	41	メルセンヌ数 ($p = 37, 41$)	66	偶数の六角数
17	6 番目のメルセンヌ素数 ($p = 17$) と完全数	42	(m, k) -完全数	67	$2^{67} - 1$ の素因数分解とコール
18	約数を完全数個もつ数	43	メルセンヌ数 ($p = 43$)	68	完全数の約数の和の総和
19	3 番目と 4 番目の完全数の各位の和	44	完全数の約数の差	69	約数の和が完全数になる数の差
20	完全数の数式考察①	45	約数を三角数個もつ三角数	70	過剰数 $\sigma(n) > 2n$
21	ハイパー完全数	46	暫定順のメルセンヌ素数	71	メルセンヌ数 ($p = 67, 71$)
22	完全数の数式からできる数の差	47	メルセンヌ数 ($p = 47$)	72	連続約数が完全数個になる数
23	メルセンヌ数 ($p = 23, 29$)	48	約数の和と元の数の割合が大きくなる数	73	8 番目の完全数と各位の和
24	完全数の数式考察②	49	現在のメルセンヌ素数の個数	74	31 番目のメルセンヌ素数
25	$\sigma(n) - n$ が完全数になる数	50	不足数一覧	75	32 番目のメルセンヌ素数

数	内容	数	内容
76	13番目の完全数の下2桁 ($p = 521$)	115	素因数の和が完全数になる数
77	12番目の完全数と桁数 ($p = 127$)	120	完全数になれなかった数①
78	偶数の三角数	672	式で表せない倍積完全数
79	メルセンヌ数 ($p = 79$)	8128	奇数の立方和一覧
80	過剰数一覧	8191	メルセンヌ素数の指数部と $n^2 + n + 1$ 最大のメルセンヌ素数
81	35番目のメルセンヌ素数とGIMPS		
82	1~100の完全数・不足数・過剰数		
83	メルセンヌ数 ($p = 83$)		
84	完全数の最小公倍数		
85	27番目のメルセンヌ素数と発見年②		
86	メルセンヌ素数の指数の差		
87	28の長さの循環節をもつ数		
88	10番目の超完全数		
89	10番目と11番目のメルセンヌ素数		
90	メルセンヌ数の未解決問題		
91	中心つき九角数一覧		
92	21世紀に初めて発見されたメルセンヌ素数		
93	異なるメルセンヌ素数の積でできる数		
94	完全数の補数		
95	不足数 $\sigma(n) < 2n$		
96	素因数の積が完全数になる数		
97	メルセンヌ数 ($p = 97$)		
98	メルセンヌ素数をつくる指数の素数順		
99	22番目のメルセンヌ素数と発見年①		
100	$2^{100} - 1$ と $2^{100} + 1$		

はじめに

数学の世界では完全数 (perfect number) は特別な数です。この完全数と他の数はどんな関係にあるのでしょうか？ 完全数からみた数の世界の話です。

最終更新日 2023年 2月 27日

1

完全数は約数の和が自身の2倍になる数で以下の数式を満たす数です。

$$\sigma(n) = 2n$$

1の約数の和は1で元の数と等しくなります。

$$\sigma(1) = 1$$

この性質をもつ数は1だけで、数の中では1は特別な存在です。

2

この「完全数の話」では話がよく出てきます。これは約数関数といいその数の約数の和を表します。例えば2の約数は1と2で和は3になります。このことを σ を用いて

$$\sigma(2) = 3$$

と表します。

$$2 \times \sigma(2) = 6$$

3

整数列大辞典
A000668

完全数を作る数の素因数に $2^p - 1$ の形の素数が必要です。3はこの形の最小の素数です。

$$3 = 2^2 - 1$$

この形で表すことができる数をメルセンヌ数といい、素数の場合にはメルセンヌ素数といいます。(7, 6 参照)

4

整数列大辞典
A019279

完全数を作る数の因数に 2^n の因数が必要で、この数は $\sigma^2(n) = 2n$ が成り立つ超完全数です。
 $\sigma^2(4) = \sigma(7) = 8 = 2 \times 4$
超完全数 4 からできる完全数は 28 です。

$$28 = 2^2 \times (2^3 - 1) \\ = 4 \times 7$$

(16, 64, 88 参照)

5

整数列大辞典
A146542

約数の和が完全数になる数はそんなにたくさんありません。5は約数の和が完全数 6 になる数で、約数の和が完全数になる数としては最小の数です。この数は以下の数式を満たす数です。(12, 69 参照)

$$\sigma^2(n) = 2\sigma(n)$$

6

整数列大辞典
A000396

最小の完全数は6です。
6の約数は1, 2, 3, 6で
約数の和は12になり6
の2倍です。偶数の完
全数は

$$2^{n-1} \times (2^n - 1)$$

の形で表せます。6は
 $n = 2$ の場合です。

$$6 = 2 \times 3 = 2 \times \sigma(2)$$

「完全数の一の位は現在6と8し
かありません。また偶数の完全数は
この式の形に限ることをオイラー
が証明しました。」(Oz)

7

整数列大辞典
A000668

2番目のメルセンヌ素数
が7です。(3, 31参照)

$$7 = 2^3 - 1$$

順	数	$2^p - 1$	完全数
①	3	$2^2 - 1$	6
②	7	$2^3 - 1$	28
③	31	$2^5 - 1$	496
④	127	$2^7 - 1$	8128
⑤	8191	$2^{13} - 1$	33550336

「メルセンヌ素数の指数の p は素
数ですがすべてメルセンヌ素数に
なるわけではありません。」(Oz)

(11, 38 参照)

8

整数列大辞典
A144858

$n = 4$ のとき完全数を
作る数式の2の累乗部
分には8が出現します。
しかし完全数にはなり
ません。

$$2^3 \times (2^4 - 1) = 8 \times 15 \\ = 120$$

120の約数の和は360で
3倍になるため3倍完
全数または倍積完全数
といいます。(672参照)

9 整数列大辞典 A092506

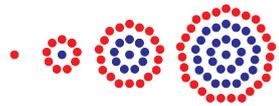
9は 2^p+1 の形で表せ
 ます。 $9=2^3+1$
 この形の数はほとんど
 合成数です。この形で
 素数になる数は6個し
 かみつかっていません。
 2以外は $2^{2^n}+1$ の形の
 フェルマー素数です。

順	数	n	順	数	n
①	2	0	④	17	2
②	3	0	⑤	257	4
③	5	1	⑥	65537	16

10 整数列大辞典 A060544

10は2番目の中心つき
 九角数です。6を除く完
 全数はすべてこの数列
 に含まれます。この数
 列の n 番目の数 N_c は
 次の形で表せます。

$$N_c = \frac{(3n-2)(3n-1)}{2}$$



11 整数列大辞典 A054723

11は5番目の素数です。
 しかし $2^{11}-1$ は合成数
 です。メルセンヌ素数に
 ならない最小の素数で
 す。 $2^{11}-1=2047$

$$= 23 \times 89$$

次の数は $p=23$ です。

$$2^{23}-1=8388607$$

$$2^{29}-1=536870911$$

「問題です。電卓を使って素数にな
 らないメルセンヌ数の素因数分解
 に挑戦してみませんか？」(Oz)

(23参照)

12

整数列大辞典
A139256

12は完全数6の約数の和で12の約数の和は完全数28です。このような性質をもつ数は12だけです。(5, 69参照)

順	n	$\sigma(n)$	$\sigma^2(n)$
①	6	12	28
②	28	56	120
③	496	992	2016
④	8128	16256	32640

「2つの完全数6と28の仲をとりもつ数が12ということです。」(Oz)

13

整数列大辞典
A000668

$2^{13}-1$ は5番目のメルセンヌ素数です。

$$2^{13}-1=8191$$

このメルセンヌ素数を2進数で表すと1が13個並びます。またこの数からできる完全数は

$$2^{12} \times (2^{13}-1) \\ = 4096 \times 8191 = 33550336$$

の8桁の数で、各位の和は28です。(31, 17参照)

14

整数列大辞典
A061645

4番目の完全数8128の約数の個数は14個です。

$$8128 = 2^6 \times (2^7 - 1)$$

$$= 2^6 \times 127$$

2^7-1 が素数であることと 2^6 の約数が7個あるからこの数の約数は14個です。(18, 26参照)

15

整数列大辞典
A000217

完全数はすべて三角数です。三角数とは自然数を順に加えていった数列です。15は5番目の三角数です。

$$15=1+2+3+4+5$$

$$6=1+2+3$$

$$28=1+2+3+4+5+6+7$$

496は31番目、8128は127番目の三角数です。

(78 参照)

16

整数列大辞典
A019279

完全数を作る数式の2の累乗部分の数は「超完全数」といいます。この数は2回続けて約数の和を求めると元の数の2倍になる数です。

$$\sigma^2(16) = \sigma(31)$$

$$= 32$$

$$= 16 \times 2$$

(4, 64, 88 参照)

「Wikipedia の超完全数の頁は自分が翻訳しました。」(Oz)

17

整数列大辞典
A000668

$2^{17}-1$ は6番目のメルセンヌ素数です。

$$2^{17}-1 = 131071$$

この数からできる完全数は $2^{16} \times (2^{17}-1)$

$$= 65536 \times 131071$$

$$= 8589869056$$

の10桁の数で各位の和は64です。(13, 55 参照)

18

整数列大辞典
A030515

約数を完全数個もつ最小の数は12です。18は約数を6個もつ2番目の数です。約数を28個もつ最小の数は960です。

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$960 = 2^6 \times 3 \times 5$$

順数	順数	順数	順数
① 12	⑥ 44	⑪ 68	⑯ 99
② 18	⑦ 45	⑫ 75	⑰ 116
③ 20	⑧ 50	⑬ 76	⑱ 117
④ 28	⑨ 52	⑭ 92	⑲ 124
⑤ 32	⑩ 63	⑮ 98	⑳ 147

19

整数列大辞典
A138828

3番目の完全数496と4番目の完全数8128の各位の和はどちらも19です。

$$496 \rightarrow 4 + 9 + 6 = 19$$

$$8128 \rightarrow 8 + 1 + 2 + 8 = 19$$

5番目の完全数33550336の各位の和は28です。

(55, 73 参照)

20

整数列大辞典
A063376

完全数を作る数式の()内の符号を変えて指数部分を同じにすると2番目が20です。

$$20 = 2^2 \times (2^2 + 1)$$

$$= 2^4 + 2^2$$

$$= 20$$

$2^n \times (2^n + 1)$ の形で表せる2番目の数です。

順数	順数	順数
① 6	③ 72	⑤ 1056
② 20	④ 272	⑥ 4160

21 整数列大辞典
A034897

ハイパー完全数という数があります。これは $n = 1 + k(\sigma(n) - n - 1)$ を満たす n で、例えば 21 の約数の和 $\sigma(21)$ は 32, これから 21 と 1 を引くと 10, 結果 2 倍に 1 を加えると 21 になることから 2-ハイパー完全数です。完全数は 1-ハイパー完全数です。

22 整数列大辞典
A139228

完全数 6 と 28 の差が 22 です。(44 参照)

n	$2^{n-1}(2^n - 1)$	差
2	6	22
3	28	92
4	120	376
5	496	1520
6	2016	6112
7	8128	

赤字は完全数です。
この数は以下の数式で表せます。

$$a_n = 3 \cdot 2^{2n-1} - 2^{n-1}$$

「22の新たな性質発見！」(Oz)

23 整数列大辞典
A054723

23は9番目の素数です。しかし $2^{23} - 1$ は合成数です。

$$2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \times 178481$$

$$2^{29} - 1 = 536870911 = 233 \times 1103 \times 2089$$

次の数は $p = 37$ です。

$$2^{37} - 1 = 137438953471$$

$$2^{41} - 1 = 2199023255551$$

(11, 41 参照)

24

整数列大辞典
A059153

完全数を作る数式の指数部の符号を変えるとどんな数が出てくるでしょう。

$$N = 2^{n+1} \times (2^n - 1)$$

順	数	順	数
①	4	⑥	8064
②	24	⑦	32512
③	112	⑧	130560
④	480	⑨	523264
⑤	1984	⑩	2095104

「1984年に気づきたかった…」(Oz)

25

整数列大辞典
A237286

25は自身を除く約数の和が6になります。

$$\sigma(25) - 25 = 6$$

完全数の6以外で

$$\sigma(n) - n = 6$$

となる唯一の数です。
この数が496になる数には652があります。

$$\sigma(652) - 652 = 496$$

「8128になる数は自身を除くと2つあります。整数列大辞典で確認して下さい。」(Oz)

26

整数列大辞典
A061645

26は5番目の完全数を作る指数部分13の2倍です。

$$33550336 = 2^{12} \times (2^{13} - 1)$$

$2^n - 1$ の部分は素数なので約数の個数は2個、 2^{n-1} の約数の個数は n 個なので完全数の約数の個数は $2n$ 個になります。(14参照)

27

完全数と立方数には密接な関係があります。6を除く完全数は奇数の立方和で表せるからです。立方に着目して調べてみました。

(8128 参照)

$$496 = \sum_{k=1}^7 k^3 - \sum_{k=1}^4 k^k$$

$$8128 = 20^3 + 2^7$$

28

整数列大辞典
A000396

28は2番目の完全数です。

「もし単位から始まり順次に1:2の比をなす任意個の数が定められ、それらの総和が素数になるようにされ、そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば、その数は完全数であろう。」

『ユークリッド原論』第9巻 命題36

上の文は次のように置き換えられます。

「 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = M_n$ が素数ならば $M_n \times 2^{n-1}$ は完全数になる。」

29

整数列大辞典
A135629

29は完全数28に1を加えた数です。

順	完全数-1 (A135627)	完全数+1 (A135629)
①	5	7
②	27	29
③	495	497
④	8127	8129
⑤	33550335	33550337

「数を考えるときには前後の数も考慮しなければいけません。」(Oz)

30整数列大辞典
A064987

完全数を作る数式
 $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ は $n \times \sigma(n)$
 を満たします。

n	$n \times \sigma(n)$	n	$n \times \sigma(n)$
1	1	9	117
2	6	10	180
3	12	11	132
4	28	12	336
5	30	13	182
6	72	14	336
7	56	15	360
8	120	16	496

$8128 = 64 \times \sigma(64)$
 「336はかなりすごい数です。」(Oz)

31整数列大辞典
A103901

3番目のメルセンヌ素数
 が31です。(7, 13参照)

$$31 = 2^5 - 1$$

また自身が新たなメル
 センヌ素数(8番目)を
 作る数です。(61参照)

$$2^{31} - 1 = 2147483647$$

現在メルセンヌ素数は
 49個ですが、この性質
 をもつ数は4個です。

$$3, 7, 31, 127$$

32整数列大辞典
A006516

完全数を作る数式に
 $n = 6$ を代入すると32
 の因数が表れます。こ
 の数は完全数になれま
 せんでした。(35参照)

$$2^5 \times (2^6 - 1) = 32 \times 63 \\ = 2016$$

2016の約数の和は6552
 です。

$$6552 \div 2016 = \frac{13}{4} = 3.25$$

33

整数列大辞典
A239546

3番目の完全数 496 の
素因数の和が 33 です。

$$496 = 2^4 \times 31$$

順	完全数	素因数の和
①	6	5
②	28	9
③	496	33
④	8128	129
⑤	33550336	8193

「完全数の素因数の和は (メルセンヌ素数)+2 で表せます。また素因数の和が完全数になる最小の数は115です。」(Oz)

34

整数列大辞典
A092336

最小の完全数 6 と 2番目の完全数 28 の和が 34 です。(35 参照)

順	完全数	総和
①	6	6
②	28	34
③	496	530
④	8128	8658
⑤	33550336	33558994

「総和は $2^{n-1}(2^n - 1)$ からできる数をすべて含めないと数式で表すことができません。」(Oz)

35

整数列大辞典
A171477

完全数を作る数式を考察しました。(34 参照)

$$a_n = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$$

n	$2^{n-1}(2^n-1)$	総和
1	1	1
2	6	7
3	28	35
4	120	155
5	496	651
6	2016	2667
7	8128	10795

総和は以下の式です。

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1)(2^n - 1)$$

36

整数列大辞典
A007582

完全数を作る数式の ()
内の符号を変えるとど
んな数が出てくるので
しょう。

$$N = 2^{n-1} \times (2^n + 1)$$

n	数	n	数
1	3	6	2080
2	10	7	8256
3	36	8	32896
4	136	9	131328
5	528	10	524800

「 2^n 番目の三角数です。」(Oz)

37

整数列大辞典
A061193

9 番目の完全数は 37 桁
の数です。

$$2^{60} \times (2^{61} - 1)$$

$$= 2658455991569831744$$

$$654692615953842176$$

各位の和は190です。

(73, 54, 61, 99 参照)

この数は1883年ロシア
の数学者イヴァン・パヴ
シンによって発見され
ました。

38

メルセンヌ素数をつく
る指数の数はどうして
素数なのでしょう？

$$2^{38} - 1 = 274877906943$$

$$= (2^2 - 1) \times 174763 \times (2^{19} - 1)$$

$$= 3 \times 174763 \times 524287$$

$2^{ab} - 1$ は必ず $2^a - 1$ と
 $2^b - 1$ の因数をもつか
らです。

「証明は高校の数 II を勉強したら
挑戦してみてください。」(Oz)

(38 参照)

39

整数列大辞典
A000668

フランスの数学者エドゥ
アール・リュカ(1842-
1891)は $2^{127}-1$ の自然
数(39桁)を手計算で19
年かけて1857年に素数
であることを確かめま
した。手計算で求めた
素数の世界記録です。

$$2^{127} - 1 = 17014118346046923173$$

$$1687303715884105727$$

(89, 99参照)

「リュカは素数判定法を開発し素数であることを示しました。」(Oz)

40

整数列大辞典
A028403

完全数を作る数式のす
べての符号を変えると
どんな数が出てくるの
でしょう。

$$N = 2^{n+1} \times (2^n + 1)$$

順	数	順	数
①	12	⑥	8320
②	40	⑦	33024
③	144	⑧	131584
④	544	⑨	525312
⑤	2112	⑩	2099200

「かなり美しい? かな。」(Oz)

41

整数列大辞典
A054723

41は13番目の素数で
す。しかし $2^{41}-1$ は合
成数です。

$$2^{41} - 1 = 2199023255551$$

$$= 13367 \times 164511353$$

$$2^{37} - 1 = 137438953471$$

$$= 223 \times 616318177$$

次の数は $p = 43$ です。

$$2^{43} - 1 = 8796093022207$$

(23, 43参照)

42整数列大辞典
A019283

42 は 2 回続けて約数の和を求めると元の数の 6 倍になります。

$$42 \rightarrow 96 \rightarrow 252$$

連続で約数の和を m 回求めて k 倍になる数を (m, k) -完全数といいます。42 は $(2, 6)$ -完全数です。完全数は $(1, 2)$ -完全数です。

$$\sigma^m(n) = kn$$

43整数列大辞典
A054723

43 は 14 番目の素数です。しかし $2^{43} - 1$ は合成数です。

$$2^{43} - 1$$

$$= 8796093022207$$

$$= 431 \times 9719 \times 2099863$$

次の数は $p = 47$ です。

$$2^{47} - 1$$

$$= 140737488355327$$

([41](#), [47](#)参照)

44

最小の完全数 6 と 2 番目の完全数 28 との約数の和の差が 44 です。

$$\begin{aligned} \sigma(28) - \sigma(6) &= 56 - 12 \\ &= 44 \end{aligned}$$

2 番目は

$$\begin{aligned} \sigma(496) - \sigma(28) &= 992 - 56 \\ &= 936 \end{aligned}$$

3 番目は 15264 です。

45

整数列大辞典
A116541

完全数28と496の両方に共通する性質に、約数を三角数の個数個をもつ三角数という性質があります。45は6個の約数をもつ三角数です。

順 数	順 数	順 数
① 1	⑥ 325	⑪ 4950
② 28	⑦ 496	⑫ 7260
③ 45	⑧ 2016	⑬ 7381
④ 153	⑨ 3321	⑭ 8256
⑤ 171	⑩ 4753	⑮ 11628

46

現在メルセンヌ素数は49個みつかっていますが46番から49番の順番は暫定です。これは45番 ($p = 37156667$) から46番 ($p = 42643801$) の間の素数をすべて調べていないため変更の可能性があるからです。(92, 49参照)
「現在 (2018年3月) は46番まで確定しました。」(Oz)

47

整数列大辞典
A054723

47は15番目の素数です。しかし $2^{47} - 1$ は合成数です。

$$\begin{aligned} & 2^{47} - 1 \\ &= 140737488355327 \\ &= 2351 \times 4513 \times 13264529 \end{aligned}$$

次の数は $p = 53$ です。

$$\begin{aligned} & 2^{53} - 1 \\ &= 9007199254740991 \end{aligned}$$

(43, 53参照)

48 整数列大辞典 A077006

48 の約数の和は 124 です。元の数と約数の和を比較したとき割合がそれ以前の数より大きくなる数です。

$$124 \div 48 \doteq 2.5833\dots$$

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m} \quad (n > m)$$

順	n	順	n	順	n	順	n
①	1	④	6	⑦	36	⑩	120
②	2	⑤	12	⑧	48	⑪	180
③	4	⑥	24	⑨	60	⑫	240

49

新しい完全数を見つけることと最大のメルセンヌ素数を見つけることは奇数の完全数がみつからないため現在同値です。2017年現在 49 個のメルセンヌ素数がみつかっています。よって現在の完全数は 49 個です。

「現在 (2024年5月) は仮51番目まで発見できています。」(Oz)

50 整数列大辞典 A005100 A000040

50は不足数です。不足数とは約数の和が元の数の2倍より小さくなる数です。(82, 95参照)

順	数	順	数	順	数	順	数
①	1	⑨	10	⑰	21	⑳	32
②	2	⑩	11	⑱	22	㉑	33
③	3	⑪	13	⑲	23	㉒	34
④	4	⑫	14	⑳	25	㉓	35
⑤	5	⑬	15	㉑	26	㉔	37
⑥	7	⑭	16	㉒	27	㉕	38
⑦	8	⑮	17	㉓	29	㉖	39
⑧	9	⑯	19	㉔	31	㉗	41

51

整数列大辞典
A052220

51の各位の和は完全数6です。各位の和が6になる6番目の数です。最小はもちろん6, 28番目は600です。また各位の和が完全数28で最小は1999, 6番目の数は3889, 28番目は5878です。(55, 73参照)

「各位の和が496になる最小の数は56桁の数です。」(Oz)

52

整数列大辞典
A120100

$\frac{1}{52}$ は小数で表すと6の循環節をもつ10番目の数です。(87参照)

$$\frac{1}{52} \doteq 0.01923076\dots$$

順	n	順	n	順	n	順	n
①	7	⑥	28	⑪	56	⑯	78
②	13	⑦	35	⑫	63	⑰	84
③	14	⑧	39	⑬	65	⑱	91
④	21	⑨	42	⑭	70	⑲	104
⑤	26	⑩	52	⑮	77	⑳	105

6桁の有限小数は $\frac{1}{64}$ です。

53

整数列大辞典
A054723

53は16番目の素数です。しかし $2^{53}-1$ は合成数です。

$$\begin{aligned} &2^{53}-1 \\ &= 9007199254740991 \\ &= 6361 \times 69431 \times 20394401 \end{aligned}$$

次の数は $p = 59$ です。

$$\begin{aligned} &2^{59}-1 \\ &= 576460752303423487 \end{aligned}$$

(47, 59参照)

54

整数列大辞典
A061193

10番目の完全数は54桁の数です。

$$2^{88} \times (2^{89} - 1)$$

$$= 191561942608236107$$

$$294793378084303638$$

$$130997321548169216$$

各位の和は235です。

(37, 65, 88, 89 参照)

「この数は1911年アメリカのR・E・パワーズによって発見されました。12番目が発見されてから35年後でした。」(Oz)

55

整数列大辞典
A138828

7番目の完全数の各位の和が55です。この数は12桁の数です。(17, 73)

$$2^{18} \times (2^{19} - 1)$$

$$= 262144 \times 524287$$

$$= 137438691328$$

順	完全数	各位の和	桁数
①	6	6	1
②	28	10	2
③	496	19	3
④	8128	19	4
⑤	33550336	28	8
⑥	8589869056	64	10

56

整数列大辞典
A020522

56は完全数28の約数の和です。(68 参照)

$$56 = 2^3 \times 7$$

$$= 2^3 \times (2^3 - 1)$$

$$= 2^6 - 2^3$$

$$= 4^3 - 2^3$$

$2^n \times (2^n - 1)$ の形で表せる3番目の数です。

順	数	順	数	順	数
①	2	④	240	⑦	16256
②	12	⑤	992	⑧	65280
③	56	⑥	4032	⑨	261632

57

57は n^2+n+1 の形で表
せます。

$$57 = 7^2 + 7 + 1$$

メルセンヌ素数をつく
る指数部分の数がこの
形で表せるかを調べま
した。(8191参照)

順	p	n^2+n+1
②	3	1^2+1+1
④	7	2^2+2+1
⑤	13	3^2+3+1
⑧	31	5^2+5+1
⑳	4423	66^2+66+1

58

整数列大辞典
A000203

58の約数の和は90です。
約数の和を求めるには
素因数分解を使います。

$$58 = 2 \times 29$$

$$\begin{aligned} \text{約数の和を } N \text{ とすると} \\ N &= (2^0+2^1) \times (29^0+29^1) \\ &= 3 \times 30 \\ &= 90 \end{aligned}$$

59

整数列大辞典
A054723

59は、17番目の素数で
す。しかし $2^{59}-1$ は合
成数です。

$$\begin{aligned} &2^{59}-1 \\ &= 576460752303423487 \\ &= 179951 \times 3203431780337 \\ \text{次の数は } p &= 71 \text{ です。} \\ &2^{71}-1 \\ &= 2361183241434822606847 \\ &2^{67}-1 \\ &= 147573952589676412927 \\ &(\overline{53}, \overline{71} \text{参照}) \end{aligned}$$

60整数列大辞典
A219205

完全数を作る数式における $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ の定数部分 2 を変えればどんな数が出てくると思いますか？

$$60 = 4^1 \times (4^2 - 1)$$

m	数
3	2, 24, 234, 2160
4	3, 60, 1008
5	4, 120, 3100
6	5, 210, 7740
7	6, 336, 16758
8	7, 504, 32704

61整数列大辞典
A000043

$2^{61} - 1$ は 9 番目のメルセンヌ素数です。
([31](#), [89](#)参照)

$$2^{61} - 1 = 2305843009213693951$$

順	p	順	p	順	p
①	2	⑨	61	⑰	2281
②	3	⑩	89	⑱	3217
③	5	⑪	107	⑲	4253
④	7	⑫	127	⑳	4423
⑤	13	⑬	521	㉑	9689
⑥	17	⑭	607	㉒	9941
⑦	19	⑮	1279	㉓	11213
⑧	31	⑯	2203	㉔	19937

62整数列大辞典
A139257

3 番目のメルセンヌ素数 31 の 2 倍が 62 です。このことは 3 番目の完全数 496 の素因数の積が 62 になることを表しています。

$$496 = 2^4 \times (2^5 - 1) \\ = 2^4 \times 31$$

順	素因数の積	順	素因数の積
①	6	④	254
②	14	⑤	16382
③	62	⑥	262142

63

整数列大辞典
A135972

63はメルセンヌ数ですがメルセンヌ素数ではありません。(11参照)

$$63 = 2^6 - 1 = 3^2 \times 7$$

順	メルセンヌ数	$2^p - 1$
①	1	$2^1 - 1$
④	15	$2^4 - 1$
⑥	63	$2^6 - 1$
⑧	255	$2^8 - 1$
⑨	511	$2^9 - 1$
⑩	1023	$2^{10} - 1$
⑪	2047	$2^{11} - 1$

「1以外は合成数です。素因数分解できますか？」(Oz)

64

整数列大辞典
A019279

64は4番目の超完全数です。超完全数は以下の数式を満たす自然数 n です。(4, 16, 88参照)

$$\sigma^2(n) = 2n$$

$$\sigma^2(64) = \sigma(127)$$

$$= 128$$

$$= 64 \times 2$$

順	数	順	数	順	数
①	2	③	16	⑤	4096
②	4	④	64	⑥	65536

65

11番目の完全数は65桁の数です。

$$2^{106} \times (2^{107} - 1)$$

$$= 13164036458569648$$

$$33723975346045872$$

$$29102234723183869$$

$$43117783728128$$

各位の和は289です。

(54, 77, 89, 99参照)

「この数は1914年アメリカのR・E・パワーズによって発見されました。パワーズは趣味で数学を愛好していました。」(Oz)

66

整数列大辞典
A014635

完全数はすべて偶数の六角数です。偶数の六角数 H_{2n} は次の式で表せます。

$$H_{2n} = 2n(4n - 1)$$

順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	276	⑪	946
②	28	⑦	378	⑫	1128
③	66	⑧	496	⑬	1326
④	120	⑨	630	⑭	1540
⑤	190	⑩	780	⑮	1770

「8128は32番目です。また六角数は hexagonal number といいます。」(Oz)

67

1876年リュカが $p = 67$ のときの $2^p - 1$ からできる数は素数判定法から合成数ということを示しました。1903年アメリカの数学者コールが具体的な素因数分解を示しました。(99参照)

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 193707721 \times 761838257287$$

「素数でないことがわかっていても具体的な因数がすぐにわかるわけではありません。」(Oz)

68

完全数6と28の約数の和の総和は68です。

$$\sigma(6) + \sigma(28) = 12 + 56 = 68$$

順	完全数	$\sigma(n)$	総和
①	6	12	12
②	28	56	68
③	496	992	1060
④	8128	16256	17316

(56参照)

「倍積完全数を含めると異なる数が出現します。」(Oz)

69整数列大辞典
A001065

69 は約数の和が完全数
496 になる 427 と完全
数 496 の差です。

$$496 - 427 = 69$$

順	数(n) (A146542)	約数の和 (完全数)	差(N)
①	5	6	1
②	12	28	16
③	427	496	69
④	10924032	33550336	22626304
⑤	16125952	33550336	17424384

$$N = \sigma(n) - n$$

(5, 12, 25 参照)

70整数列大辞典
A005101

70 は過剰数です。過剰
数とは約数の和が元の
数の 2 倍より大きくな
る数の事です。70 の約数
は 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70
で約数の和は 144 です。

$$144 > 70 \times 2 = 140$$

約数関数 σ を用いると

$$\sigma(n) > 2n$$

を満たす数です。

(80 参照)

71整数列大辞典
A054723

71 は 20 番目の素数で
す。しかし $2^{71} - 1$ は合
成数です。

$$\begin{aligned} & 2^{71} - 1 \\ &= 2361183241434822606847 \\ &= 228479 \times 48544121 \times 212885833 \\ & 2^{67} - 1 \\ &= 147573952589676412927 \\ &= 193707721 \times 761838257287 \end{aligned}$$

次の数は $p = 79$ です。

$$\begin{aligned} & 2^{79} - 1 \\ &= 604462909807314587353087 \end{aligned}$$

(59, 79 参照)

72

整数列大辞典
A241954

連続して約数の和を求めていったとき6個の数が72になります。

$$\sigma^m(n) = 72 \quad (m \geq 1)$$

あてはまる n は 29, 30, 46, 51, 55, 71 で 29 は $m=2$, 他は $m=1$ です。

順	数	順	数	順	数
①	72	④	508	⑦	936
②	372	⑤	816	⑧	1056
③	378	⑥	930	⑨	1178

「28個の最小は1440です。」(Oz)

73

整数列大辞典
A138828

8番目の完全数の各位の和が73です。19桁の数です。(55, 37参照)

2305843008139952128

順	各位の和	順	各位の和
⑦	55	⑭	1711
⑧	73	⑮	3520
⑨	190	⑯	5833
⑩	235	⑰	5968
⑪	289	⑱	8821
⑫	352	⑲	11548
⑬	1405	⑳	11791

「オイラーが発見しました。」(Oz)

74

整数列大辞典
A060544

31番目のメルセンヌ素数の上位2桁が74です。 $p=216091$ で約6万5千桁の数です。1985年にスローウィンスキーが発見しました。次の数は22万桁の数だったので次の発見まで7年間も待たなければなりません。(85, 75参照)

75 整数列大辞典
A000043

32番目のメルセンヌ素数
を表す指数 p の上位 2
桁が75です。 $p=756839$
で約 22万桁の数です。
この数からとうとう桁
数が 10 万桁を突破しま
した。(74, 81, 85 参照)
「発見者は 31 番目と同じでスロ
ウィンスキーです。この人はソフ
トウェアのエンジニアだったよう
です。」(Oz)

76 整数列大辞典
A138874

13 番目の完全数の下 2
桁は 76 です。
 $2^{520} \times (2^{521} - 1)$
= 23562723457267347065789548
99670990498847754785839260
07101430275975063372831786
22239730365539602600561360
25556646250327017505289257
80432155433824984287771524
27010394496918664028644534
12803383143979023683862403
31714359223566432197031017
20713163527487298747400647
80193958716593640108741937
56490579185494921605556469
76
314桁の数で各位の和は
1405です。(77, 99参照)

77 整数列大辞典
A061193

12 番目の完全数は77桁
の数です。(65, 76, 39, 55)
 $2^{126} \times (2^{127} - 1)$
= 14474011154664524427
94637312608598848157
36774914748358890663
54349131199152128

順	桁数	順	桁数	順	桁数
⑦	12	⑫	77	⑰	1373
⑧	19	⑬	314	⑱	1937
⑨	37	⑭	366	⑲	2561
⑩	54	⑮	770	⑳	2663
⑪	65	⑯	1327	㉑	5834

78

整数列大辞典
A014494

完全数はすべて偶数の三角数です。偶数の三角数は以下の式で表せます。(15, 66参照)

$$N = \frac{(2n+1)(2n+1-(-1)^n)}{2}$$

順数	順数	順数	順数
① 6	⑦ 120	⑬ 378	
② 10	⑧ 136	⑭ 406	
③ 28	⑨ 190	⑮ 496	
④ 36	⑩ 210	⑯ 528	
⑤ 66	⑪ 276	⑰ 630	
⑥ 78	⑫ 300	⑱ 666	

「8128は63番目です。」(Oz)

79

整数列大辞典
A054723

71は22番目の素数です。しかし $2^{79}-1$ は合成数です。

$$\begin{aligned} &2^{79}-1 \\ &= 604462909807314587353087 \\ &= 2687 \times 202029703 \\ &\quad \times 1113491139767 \end{aligned}$$

次の数は $p = 83$ です。

$$\begin{aligned} &2^{83}-1 \\ &= 9671406556917 \\ &\quad 033397649407 \end{aligned}$$

(71, 83参照)

80

整数列大辞典
A005101

n の約数の和が $2n$ よりも大きいとき n を過剰数といいます。80の約数の和は186で80の2倍160より大きくなるので過剰数です。(70参照)

順数	順数	順数	順数
① 12	⑦ 40	⑬ 66	⑰ 88
② 18	⑧ 42	⑭ 70	⑱ 90
③ 20	⑨ 48	⑮ 72	⑳ 96
④ 24	⑩ 54	⑯ 78	㉑ 100
⑤ 30	⑪ 56	⑰ 80	㉒ 102
⑥ 36	⑫ 60	⑱ 84	㉓ 104

81

整数列大辞典
A060544

35番目のメルセンヌ素数の上位2桁が81です。
 $p = 1398269$ で約42万桁の数です。この数は初めてGIMPSプロジェクトで1996年に発見された数です。

Great Internet
Mersenne Prime Search
「PCにソフトをインストールすれば参加することができます。」(Oz)
(75, 92, 85 参照)

82

整数列大辞典
A005100

82は不足数です。100以下の不足数は75個あります。(50, 95 参照)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	○	○	○	○	○	完	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○	○	○	○	●	○
20	○	○	○	●	○	○	○	完	○	●
30	○	○	○	○	○	●	○	○	○	●
40	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○
50	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●
60	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
70	○	○	●	○	○	○	○	○	○	●
80	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
90	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

(完:完全数, ○:不足数, ●:過剰数)

83

整数列大辞典
A054723

83は23番目の素数です。しかし $2^{83} - 1$ は合成数です。

$$2^{83} - 1 = 9671406556917033397649407 = 167 \times 57912614113275649087721$$

次の数は $p = 97$ です。

$$2^{97} - 1 = 158456325028528675187087900671$$

(79, 97 参照)

84

完全数6と28の最小公倍数は84です。

$$\begin{array}{r} 2 \) \ 6 \ 28 \\ \underline{\quad} \quad 14 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 14 = 84$$

28と496は3472, 6と496は1488, 3つの完全数の最小公倍数は10416です。

「もうすぐL.C.Mという言葉が復活するようです。」(Oz)

85

整数列大辞典
A060544

27番目のメルセンヌ素数の上位2桁が85です。
 $p=44497$ で約1万3千桁の数です。1979年に発見され初めて1万桁を突破しました。(99, 74)

順	桁数	発見年
27	13395	1979年4月
31	65050	1985年9月
32	227832	1992年2月
38	2098960	1999年6月
45	11185272	2008年9月

86

整数列大辞典
A134458

メルセンヌ素数を表す指数の14番目と13番目の差が86です。(98参照)

順	$p_{n+1} - p_n$	順	$p_{n+1} - p_n$
①	1	⑪	20
②	2	⑫	394
③	2	⑬	86
④	6	⑭	672
⑤	4	⑮	924
⑥	2	⑯	78
⑦	12	⑰	936
⑧	30	⑱	1036
⑨	28	⑲	170
⑩	18	⑳	5266

87

$\frac{1}{87}$ を小数で表すと28
の循環節をもつ3番目
の数になります。(52参照)

$$\frac{1}{87} \\ \equiv 0.01149425287356 \\ 32183908045977 \dots$$

順	数	順	数	順	数	順	数
①	29	⑥	174	⑪	319	⑯	562
②	58	⑦	232	⑫	348	⑰	580
③	87	⑧	261	⑬	435	⑱	638
④	116	⑨	281	⑭	464	⑲	696
⑤	145	⑩	290	⑮	522	⑳	725

88

整数列大辞典
A090748

10番目の完全数は2の
累乗部分の指数が88で
す。よって 2^{88} は超完全
数です。

$$2^{88} \\ = 30948500982134 \\ 5068724781056$$

(4, 16, 54, 64 参照)

「累乗はperfect powerといいま
す。かっこいい！」(Oz)

89

整数列大辞典
A000043

$2^{89}-1$ は10番目のメル
センヌ素数です。

$$2^{89}-1 \\ = 61897001964269 \\ 0137449562111$$

次の11番目のメルセン
ヌ素数は $2^{107}-1$ です。

$$2^{107}-1 \\ = 16225927682921336 \\ 3391578010288127$$

(61, 39, 54, 65 参照)

90

整数列大辞典
A049094

メルセンヌ数 $2^{90}-1$ は
平方因子をもちます。

$$2^{90}-1 \\ = 3^3 \times 7 \times 11 \times 19 \times 31 \\ \times 73 \times 151 \times 331 \times 631 \\ \times 23311 \times 18837001$$

$p = 90$ のときは 3^2 の因
子をもちますが、メルセ
ンヌ数の未解決問題は
「 p が素数のとき平方因
子があるか？」です。

91

整数列大辞典
A060544

91 は 5 番目の中心つき
九角数です。他にはど
んな数があるのでしょ
う。(10 参照)

順	数	順	数	順	数
①	1	⑧	253	⑮	946
②	10	⑨	325	⑯	1081
③	28	⑩	406	⑰	1225
④	55	⑪	496	⑱	1378
⑤	91	⑫	595	⑲	1540
⑥	136	⑬	703	⑳	1711
⑦	139	⑭	820	㉑	1891

「8128は43番目です。クリスマスの
MMDD発見！」(Oz)

92

整数列大辞典
A138862

39 番目のメルセンヌ素
数の上位 2 桁が 92 です。
 $p = 13466917$ で約 400
万桁の数です。この数
は 21 世紀になって初め
て GIMPS で発見され
たメルセンヌ素数で
す。(81, 46, 85 参照)

93

整数列大辞典
A046528

93はメルセンヌ素数を
2つ使って

$$93 = 3 \times 31$$

と表すことができます。
異なるメルセンヌ素数
の積でできる6番目の
数です。

順数	順数	順数	順数
① 1	⑤ 31	⑨ 381	⑬ 3937
② 3	⑥ 93	⑩ 651	⑭ 8191
③ 7	⑦ 127	⑪ 889	⑮ 11811
④ 21	⑧ 217	⑫ 2667	⑯ 24573

94

94は2桁の数における
完全数6の補数です。
Aの補数とは加えると
桁が増える最小の数で
す。例えば1桁の数で
は6の補数は4です。

$$6 + 4 = 10$$

$$6 + 94 = 100$$

28の補数は72です。

$$28 + 72 = 100$$

95

整数列大辞典
A005100

95は不足数です。不足
数とは約数の和が元の
数の2倍より小さくな
る数です。95の約数は
1,5,19,95で約数の和は
120です。(50, 82参照)

$$120 < 95 \times 2 = 190$$

なので不足数です。

約数関数 σ を用いると

$$\sigma(n) < 2n$$

を満たす数です。

96

整数列大辞典
A033845

96は素因数の積が完全数6になる9番目の数です。

$$96 = 2^5 \times 3$$

順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	48	⑪	144
②	12	⑦	54	⑫	162
③	18	⑧	72	⑬	192
④	24	⑨	96	⑭	216
⑤	36	⑩	108	⑮	288

「素因数の積は6以外の完全数にはなりません。またこの数は $2^i \times 3^j$ ($i, j \geq 1$) で表せます。」(Oz)

97

整数列大辞典
A054723

97は25番目の素数です。しかし $2^{97} - 1$ は合成数です。(83参照)

$$2^{97} - 1 = 158456325028528675187087900671 = 11447$$

$\times 13842607235828485645766393$
「 p が合成数のときの素因数分解は何問できましたか? 1問でもできれば免許皆伝ですよ。整数列大辞典にはメルセンヌ数の最小素因数 (least prime factor) で A136030 に登録されています。」(Oz)

98

整数列大辞典
A016027

98番目の素数は521でメルセンヌ素数をつくる13番目の素数です。

順	p	番目	順	p	番目
①	2	1	⑪	107	28
②	3	2	⑫	127	31
③	5	3	⑬	521	98
④	7	4	⑭	607	111
⑤	13	6	⑮	1279	207
⑥	17	7	⑯	2203	328
⑦	19	8	⑰	2281	339
⑧	31	11	⑱	3217	455
⑨	61	18	⑲	4253	583
⑩	89	24	⑳	4423	602

99

整数列大辞典
A000043

22番目のメルセンヌ素数を表す指数 p の上位2桁が99です。 $p = 9941$ で約2993桁の数です。1963年ギリースが発見しました。(39, 85参照)

順	桁数	発見年
⑧	10	1772年
⑫	39	1876年
⑬	157	1952年 1月
⑰	1281	1961年 11月
⑳	2993	1963年 5月

100

整数列大辞典
A000225

$2^{100}-1$ はどんな数なのでしょう。

$$2^{100}-1$$

$$= 1267650600228229$$

$$401496703205375$$

31桁の数で12個の素因数をもつ合成数です。
 $2^{100}+1$ は7個の素因数をもつ合成数です。

「だいたいよければ 2^{10} は1000として計算できます。」(Oz)

115

整数列大辞典
A008472

115 は異なる素因数の和が完全数 28 になる最小の数です。

$$115 = 5 \times 23$$

順数	数	順数	数	順数	数
①	115	⑥	414	⑪	1064
②	138	⑦	532	⑫	1104
③	187	⑧	552	⑬	1242
④	266	⑨	575	⑭	1365
⑤	276	⑩	828	⑮	1656

「素因数の和が6になる数はありません。496になる最小の数は2455, 8128になる最小は40615です。」(Oz)

120

整数列大辞典
A144858
A045762

完全数を作る数式において $n = 4$ のとき 120 です。完全数にならない 2 番目の数です。

$$120 = 2^3 \times (2^4 - 1)$$

n	数	n	数
1	1	6	2016
4	120	8	32640

(8, 32 参照)

672

整数列大辞典
A007691

672 は倍積完全数です。 $2^{n-1}(2^n - 1)$ の形でない最小の倍積完全数です。

$$672 = 2^5 \times 3 \times 7$$

$30240 = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$
一般に k 倍完全数の約数の逆数の和は k になります。これは

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{kn}{n} = k$$

から証明できます。

8128

整数列大辞典
A002593

8128 は 4 番目の完全数です。6 以外の完全数は奇数の立方和で表せます。

順	数	順	数
①	1	⑥	2556
②	28	⑦	4753
③	153	⑧	8128
④	496	⑨	13041
⑤	1225	⑩	19900

「証明は

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

からできます。」(Oz)

8191

$2^p - 1$ の形のメルセンヌ素数と $n^2 + n + 1$ との関係調べてみました。4 つありました。

数	メルセンヌ素数形	$n^2 + n + 1$
3	$2^2 - 1$	$1^2 + 1 + 1$
7	$2^3 - 1$	$2^2 + 2 + 1$
31	$2^5 - 1$	$5^2 + 5 + 1$
8191	$2^{13} - 1$	$90^2 + 90 + 1$

(57, 63 参照)

 $2^{82589933} - 1$ 整数列大辞典
A000043

2018年12月7日素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数とは

$$2^{82589933} - 1 =$$

$$\underbrace{148894 \dots \dots 902591}_{}$$

約 2486 万桁

です。

「素数判定に約1年かかるそうですね。仮51番目の数です。」(Oz)

索引

い	因数	4 32 38 67
か	各位の和	13 17 19 37 51 54 55 65 73 76 70 80 82
き	奇数	27 49 8128
く	偶数	6 66 78
け	桁	17 31 37 39 51 54 55 65 73 74 75 76 77 81 85 92 94 99 100
こ	合成数	9 11 23 41 43 47 53 59 63 67 71 79 83 97 100
さ	差	22 44 69 86
	三角数	15 45 78
し	指数	7 20 24 26 38 57 75 86 88 99
	小数	52 87
す	数式	1 5 8 16 20 22 24 30 32 34 35 36 40 60 64 120 672

そ	素因数	3 97 100
	素因数の積	62 96
	素因数の和	33 115
	素因数分解	11 58 63 67 97
ち	中心つき九角数	10 91
	超完全数	4 16 64 88
は	倍積完全数	8 16 88 8191
ふ	符号	20 24 36 40
	不足数	50 82 95
へ	フェルマー素数	9
め	メルセンヌ数	3 11 63 90 97
	メルセンヌ素数	3 7 11 13 15 17 31 33 38 46 49 57 61 62 63 74 75 81 85 86 89 92 93 98 99 8191
や	約数関数	2 70 95
り	立方	27 8128
る	累乗	8 16 88 8191

あとがき

いかがでしたか？「数の話」の第10番目として完全数を考えました。旧約聖書冒頭に神さまは6日でこの世界を創ったという記述があります。夜空に浮かぶ月は約28日の周期で満ち欠けを繰り返します。また半径が1の円周の長さは6.28です。この本があなたの数への興味・関心を深める一冊となればこれ以上の喜びはありません。

「発行日を2016年6月28日にしたかった。」

2017年10月13日

小澤茂昌

完全数の話

2017年10月13日 Ver1.0 第1刷発行

著者 おさわ しげまさ
小澤 茂昌

発行者 小澤 茂昌

発行所 和泉書院

郵便振替 00850-0-69925

定価はありません。

Web-page:<http://furano.uijin.com/index.html>

mail: furano@po2.across.or.jp

6

整数列大辞典
A000384

6 以外の完全数は奇数の立方和で表せます。6 はなぜ表せないのか？

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

ここで n^2 を m とおくと

$$a_m = m(2m-1)$$

これは六角数を表す数式です。六角数において n^2 番目の数が奇数の立方和になります。6 は $\sqrt{2}$ 番目です。

(66 参照)

12

整数列大辞典
A081357

12 は 6 個の約数の和が完全数 28 になる数です。
 $1+2+3+4+6+12=28$
 約数の個数も約数の和も完全数になる数をサブライム数といいます。
 次の数は 76 桁の数で、約数の個数は 4 番目の完全数 8128 個で和は完全数 $2^{126} \times (2^{127} - 1)$ になります。

13

整数列大辞典
A055012

13 の各位の立方和は完全数 28 です。28 になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	13	⑤	301	⑨	1300
②	31	⑥	310	⑩	3001
③	103	⑦	1003	⑪	3010
④	130	⑧	1030	⑫	3100

「各位の立方和が完全数 6 になる最小の数は R_6 です。」(Oz)

(31, 466, 1115 参照)

「2001年が平成13年で、2019年が平成31年です。」(Oz)

14 整数列大辞典
A133028

14 は完全数 28 を 2 で割った商です。

$$14 = 28 \div 2$$

順	数	完全数
①	3	6
②	14	28
③	248	496
④	4064	8128
⑤	16775168	33550336

「平成の次の元号が大化から248番目だったので、何か性質はないかと調べていたら気づきました。」(Oz)

18 整数列大辞典
A103897

18 は完全数 6 の 3 倍です。(24, 56 参照)

$$18 = 3 \times 2^1 \times (2^2 - 1)$$

順	数	倍積完全数
①	3	1
②	18	6
③	84	28
④	360	120
⑤	1488	496
⑥	6048	2016
⑦	24384	8128

「この性質を発見できてルルドの聖母が18回出現したことに納得しました。」(Oz)

24 整数列大辞典
A064510

24 の約数を小さい順に加えていくと 24 になります。

$$24 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8$$

順	n	順	n
①	1	⑥	2016
②	6	⑦	8128
③	24	⑧	8190
④	28	⑨	42336
⑤	496	⑩	45864

「完全数になれなかった数とみることができます。久しぶりにプログラム作って確認しました。」(Oz)

28

整数列大辞典
A000396

完全数はすべて三角数です。どうしてでしょう？ 現在発見されている偶数の完全数は $2^{p-1}(2^p-1)$ の形です。

$$\begin{aligned}
 M &= 2^p - 1 \text{ とおくと} \\
 2^p &= M + 1 \\
 2^{p-1} &= \frac{M+1}{2} \\
 2^{p-1}(2^p-1) &= \frac{M+1}{2} \cdot M \\
 &= \frac{M \cdot (M+1)}{2}
 \end{aligned}$$

28

整数列大辞典
A000396

2^p-1 のメルセンヌ数が素数のとき $2^{p-1}(2^p-1)$ の約数の和は 2 倍になります。どうしてでしょう？

$$\begin{aligned}
 P \text{ が素数のとき } \sigma(P) &= P+1 \\
 2^p-1 \text{ が素数より } \sigma(2^p-1) &= 2^p \\
 2^p-1 \text{ は初項 } 1, \text{ 公比 } 2 \text{ の等比数列} \\
 \sum_{k=1}^p 2^{k-1} &= \frac{1 \cdot (2^p-1)}{2-1} = 2^p-1 \\
 \sigma(2^{p-1}(2^p-1)) &= \sigma(2^{p-1}) \cdot \sigma(2^p-1) \\
 &= (2^p-1) \cdot 2^p \\
 &= 2 \cdot 2^{p-1} \cdot (2^p-1)
 \end{aligned}$$

31

31の各位の立方和は完全数28です。 $a^0+a^1+a^2$ の形の数で各位の立方和が完全数になる2番目の数です。(13参照)

順	a	n	完全数
①	3	13	28
②	5	31	28
③	177	31507	496
④	806	650443	496

「聖書においてあまりにも13が重宝されているので調べていたら気づきました。」(Oz)

36

整数列大辞典
A247111

36の約数の和91から元の数36を引いてもう一度約数の和を求めると36の2倍になります。

$$\sigma(\sigma(36)-36) = \sigma(55) = 72$$

$$\sigma(\sigma(n)-n) = 2n$$

「完全数はすべてこの数列に含まれます。現在完全数以外の数でこの数列に含まれる数は36しかありません。」(Oz)

38

その2

メルセンヌ素数をつくる指数の数は素数でなければならぬ証明です。

$$\begin{aligned} & 2^{ab}-1 \\ &= (2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\dots+2^{(b-1)a}) \\ & \text{「数学 II の二項定理と数学 B の数列を学習しないとイメージがつかめないかなあ〜。} b=3 \text{ のときの式を書いておきます。} \text{」(Oz)} \\ & 2^{3a}-1 \\ &= (2^a)^3-1 \\ &= (2^a-1)((2^a)^2+2^a+1) \\ &= (2^a-1)(1+2^a+2^{2a}) \end{aligned}$$

(38 参照)

47

整数列大辞典
A007954

47の各位の積は完全数28です。各位の積が28になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	47	⑥	272	⑪	741
②	74	⑦	417	⑫	1147
③	147	⑧	471	⑬	1174
④	174	⑨	714	⑭	1227
⑤	227	⑩	722	⑮	1272

4桁最大は7411です。

「496は31が8128は127が因数なのであてはまる数はありません。」(Oz)

61

整数列大辞典
A199988
A107692

61の各位の積は完全数6です。各位の積が6になる5番目の数です。

順	数	順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	116	⑪	231	⑯	1123
②	16	⑦	123	⑫	312	⑰	1132
③	23	⑧	132	⑬	321	⑱	1161
④	32	⑨	161	⑭	611	⑲	1213
⑤	61	⑩	213	⑮	1116	⑳	1231

4桁最大は6111です。

「各位の積は専門的には"総乗"っていいです。」(Oz)

62

整数列大辞典
A096360

62は完全数496の約数です。

$$496 = 8 \times 62$$

順	約数	完全数	順	約数	完全数
③	3	6	⑫	32	8128
④	4	28	⑬	62	496
⑤	6	6	⑭	64	8128
⑥	7	28	⑮	124	496
⑦	8	496	⑯	127	8128
⑧	14	28	⑰	128	33550336
⑨	16	496	⑱	248	496
⑩	28	28	⑲	254	8128
⑪	31	496	⑳	256	33550336

「令和は248番目の元号です。」(Oz)

90

整数列大辞典
A125310

完全数の約数はすべて不足数です。90の約数の中で不足数の約数だけを加えると90になります。

$$90 = 1 + 2 + 3 + 5 + 9 + 10 + 15 + 45$$

「90以外はすべて完全数です。整数列大辞典のコメント欄には「90以外ないのかなぁ?」と書いてありました。"不足完全数"と命名したいようでした。」(Oz)

112

整数列大辞典
A003132

112の各位の平方和は完全数6です。6になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	112	⑤	1021	⑨	1210
②	121	⑥	1102	⑩	2011
③	211	⑦	1120	⑪	2101
④	1012	⑧	1201	⑫	2110

「2011年に気づかなかった。」(Oz)

(1115 参照)

140

整数列大辞典
A074247

140の約数の調和平均は5で素数です。完全数の約数の調和平均は素数です。完全数以外では140は最小の数です。

順	数	平均	順	数	平均
①	6	2	⑤	2970	11
②	28	3	⑥	8128	7
③	140	5	⑦	27846	17
④	496	5	⑧	105664	13

「約数の調和平均とは(約数の個数) \div (約数の逆数和)です。」(Oz)

364

整数列大辞典
A090777

364はその平方数を約数の和で割ったとき整数になる5番目の数です。倍積完全数を除くと最小です。

$$364^2 \div \sigma(364) = 169$$

順	数	順	数	順	数
①	1	⑥	496	⑪	1782
②	6	⑦	672	⑫	2280
③	28	⑧	840	⑬	3276
④	120	⑨	1080	⑭	3472
⑤	364	⑩	1488	⑮	7440

466

整数列大辞典
A055012

466の各位の立方和は完全数496です。496になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	466	⑤	1375	⑨	1753
②	646	⑥	1537	⑩	3157
③	664	⑦	1573	⑪	3175
④	1357	⑧	1735	⑫	3517

4桁最大は7531です。
(13参照)

1115

整数列大辞典
A003132

1115の各位の平方和は完全数28です。28になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	1115	⑤	2224	⑨	3313
②	1151	⑥	2242	⑩	3331
③	1333	⑦	2422	⑪	4222
④	1511	⑧	3133	⑫	5111

(13, 112参照)

 $2^{136279841} - 1$ 整数列大辞典
A000043

2024年10月21日素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数は41024320桁の数でした。

 $2^{136279841} - 1$

「6年ぶりに最大素数が更新されました。順番はいつ確定できるのかな？と首をかしげるほど前回の素数と比較して離れています。その理由は？」(Oz)