2017 年 10 月 13 日

完全数の話

Version 1.0

By Shigemasa Ozawa

数	内容	数	内容	数	内容
1	$\sigma(n)=n$ となる唯一の数	26	完全数の約数の個数	51	各位の和が完全数になる完全数番目の数
2	$\sigma(n)$ の意味	27	完全数と立方	52	6 の長さの循環節をもつ数
3	最小のメルセンヌ素数 ($p=2$)	28	完全数 (ユークリッド原論より)	53	メルセンヌ数 ($p=53$)
4	完全数と超完全数	29	完全数 ±1	54	10 番目の完全数
5	約数の和が完全数になる数	30	$n\times\sigma(n)$ の数	55	7 番目の完全数と各位の和
6	最小の完全数	31	3番目と8番目のメルセンヌ素数 ($p=5,31$)	56	約数の和が倍積完全数の約数の和になる数
7	2 番目のメルセンヌ素数 ($p=3$)	32	完全数になれなかった数②	57	メルセンヌ素数の指数部と n^2+n+1
8	倍積完全数	33	完全数の素因数の和	58	約数の和の求め方
9	2^n+1 の数とフェルマー素数	34	完全数の和	59	メルセンヌ数 ($p=59$)
10	中心つき九角数	35	完全数の数式考察③	60	完全数の数式考察⑤
11	メルセンヌ数 ($p=11$)	36	完全数の数式考察④	61	9 番目のメルセンヌ素数 ($p=61$)
12	完全数の連続約数の和が完全数になる数	37	9 番目の完全数	62	完全数の素因数の積
13	5番目のメルセンヌ素数 ($p=13$) と完全数	38	メルセンヌ素数をつくる指数考察	63	メルセンヌ数
14	4番目の完全数8128の約数の個数	39	12 番目メルセンヌ素数とリュカ	64	超完全数一覧
15	三角数	40	完全数の数式考察⑤	65	11 番目の完全数 ($p=107$)
16	超完全数 $\sigma^2(n)=2n$	41	メルセンヌ数 ($p=37,\ 41$)	66	偶数の六角数
17	6番目のメルセンヌ素数 ($p=17$) と完全数	42	(m,k)-完全数	67	$2^{67}-1$の素因数分解とコール
18	約数を完全数個もつ数	43	メルセンヌ数 ($p=43$)	68	完全数の約数の和の総和
19	3番目と4番目の完全数の各位の和	44	完全数の約数の差	69	約数の和が完全数になる数の差
20	完全数の数式考察①	45	約数を三角数個もつ三角数	70	過剰数 $\sigma(n)>2n$
21	ハイパー完全数	46	暫定順のメルセンヌ素数	71	メルセンヌ数 ($p=67,\ 71$)
22	完全数の数式からできる数の差	47	メルセンヌ数 ($p=47$)	72	連続約数が完全数個になる数
23	メルセンヌ数 ($p=23,\ 29$)	48	約数の和と元の数の割合が大きくなる数	73	8 番目の完全数と各位の和
24	完全数の数式考察②	49	現在のメルセンヌ素数の個数	74	31 番目のメルセンヌ素数
25	$\sigma(n)-n$ が完全数になる数	50	不足数一覧	75	32 番目のメルセンヌ素数

数	内容	数	内容
76	13 番目の完全数の下 2 桁 ($p = 521$)	115	素因数の和が完全数になる数
77	12番目の完全数と桁数 ($p = 127$)	120	完全数になれなかった数①
78	偶数の三角数	672	式で表せない倍積完全数
79	メルセンヌ数 ($p = 79$)	8128	奇数の立方和一覧
80	過剰数一覧	8191	メルセンヌ素数の指数部と n^2+n+1
81	35番目のメルセンヌ素数とGIMPS		最大のメルセンヌ素数
82	1〜100の完全数・不足数・過剰数		
83	メルセンヌ数 ($p = 83$)		
84	完全数の最小公倍数		
85	27番目のメルセンヌ素数と発見年②		
86	メルセンヌ素数の指数の差		
87	28の長さの循環節をもつ数		
88	10 番目の超完全数		
89	10番目と11番目のメルセンヌ素数		
90	メルセンヌ数の未解決問題		
91	中心つき九角数一覧		
92	21世紀に初めて発見されたメルセンヌ素数		
93	異なるメルセンヌ素数の積でできる数		
94	完全数の補数		
95	不足数 $\sigma(n) < 2n$		
96	素因数の積が完全数になる数		
97	メルセンヌ数 ($p = 97$)		
98	メルセンヌ素数をつくる指数の素数順		
99	22番目のメルセンヌ素数と発見年①		
100	$2^{100}-1$ と $2^{100}+1$		

はじめに

数学の世界では完全数(perfect number) は特別な数です。この完全数と他の数はどんな関係にあるのでしょう？完全数からみた数の世界の話です。

最終更新日 2023年 2月 27日

1

完全数は約数の和が自身の 2 倍になる数で以下の数式を満たす数です。

$$\sigma(n)=2n$$

1の約数の和は1で元の数と等しくなります。

$$\sigma(n)=n$$

この性質をもつ数は 1 だけで，数の中では 1 は特別な存在です。

2

この「完全数の話」では $\overset{\text{シグマ}}{\sigma}$ がよく出てきます。これは約数関数といいその数の約数の和を表します。例えば 2 の約数は 1 と 2 で和は 3 になります。このことを σ を用いて

$$\sigma(2)=3$$

と表します。

$$2\times\sigma(2)=6$$

$\boxed{3}$

整数列大辞典
A000668

完全数を作る数の素因数に 2^p-1 の形の素数が必要です。3 はこの形の最小の素数です。

$$3=2^2-1$$

この形で表すことができる数をメルセンヌ数といい,素数の場合にはメルセンヌ素数といいます。($\overrightarrow{7}$，6 参照)

$\boxed{4}$

整数列大辞典
A019279

完全数を作る数の因数に 2^n の因数が必要で，この数は$\sigma^2(n)=2n$が成り立つ超完全数です。

$$\sigma^2(4)=\sigma(7)=8=2\times 4$$

超完全数 4 からできる完全数は 28 です。

$$\begin{aligned}28&=2^2\times(2^3-1)\\&=4\times 7\end{aligned}$$

(16, 64, 88 参照)

$\boxed{5}$

整数列大辞典
A146542

約数の和が完全数になる数はそんなにたくさんありません。5 は約数の和が完全数 6 になる数で，約数の和が完全数になる数としては最小の数です。この数は以下の数式を満たす数です。(12，69 参照)

$$\sigma^2(n)=2\sigma(n)$$

6

整数列大辞典
*A*000396

最小の完全数は6です。6の約数は1, 2, 3, 6で約数の和は12になり6の2倍です。偶数の完全数は

$$2^{n-1}\times(2^n-1)$$

の形で表せます。6は$n=2$の場合です。

$$6=2\times3=2\times\sigma(2)$$

「完全数の一の位は現在6と8しかありません。また偶数の完全数はこの式の形に限ることをオイラーが証明しました。」(Oz)

7

整数列大辞典
*A*000668

2番目のメルセンヌ素数が7です。($\overleftarrow{3}$, $\overrightarrow{31}$参照)

順	数	2^p-1	完全数
①	3	2^2-1	6
②	7	2^3-1	28
③	31	2^5-1	496
④	127	2^7-1	8128
⑤	8191	$2^{13}-1$	33550336

「メルセンヌ素数の指数のpは素数ですがすべてメルセンヌ素数になるわけではありません。」(Oz)

(11, 38 参照)

8

整数列大辞典
*A*144858

$n=4$のとき完全数を作る数式の2の累乗部分には8が出現します。しかし完全数にはなりません。

$$\begin{aligned}2^3\times(2^4-1)&=8\times15\\&=120\end{aligned}$$

120の約数の和は360で3倍になるため3倍完全数または倍積完全数といいます。(672 参照)

9

整数列大辞典
A092506

9は2^p+1の形で表せます。　$9=2^3+1$
この形の数はほとんど合成数です。この形で素数になる数は6個しかみつかっていません。
2以外は$2^{2^n}+1$の形のフェルマー素数です。

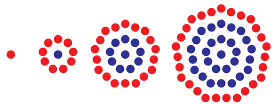
順	数	n	順	数	n
①	2		④	17	2
②	3	0	⑤	257	4
③	5	1	⑥	65537	16

10

整数列大辞典
A060544

10は2番目の中心つき九角数です。6を除く完全数はすべてこの数列に含まれます。この数列のn番目の数N_cは次の形で表せます。

$$N_c=\frac{(3n-2)(3n-1)}{2}$$



11

整数列大辞典
A054723

11は5番目の素数です。しかし$2^{11}-1$は合成数です。メルセンヌ素数にならない最小の素数です。

$$\begin{aligned}2^{11}-1&=2047\\&=23\times 89\end{aligned}$$

次の数は$p=23$です。

$$2^{23}-1=8388607$$
$$2^{29}-1=536870911$$

「問題です。電卓を使って素数にならないメルセンヌ数の素因数分解に挑戦してみませんか？」(Oz)
(23参照)

12

整数列大辞典 *A139256*

12は完全数6の約数の和で12の約数の和は完全数28です。このような性質をもつ数は12だけです。(5, 69 参照)

順	n	$\sigma(n)$	$\sigma^2(n)$
①	6	12	28
②	28	56	120
③	496	992	2016
④	8128	16256	32640

「2つの完全数6と28の仲をとりもつ数が12ということです。」(Oz)

13

整数列大辞典 *A000668*

$2^{13}-1$は5番目のメルセンヌ素数です。

$$2^{13}-1 = 8191$$

このメルセンヌ素数を2進数で表すと1が13個並びます。またこの数からできる完全数は

$$2^{12}\times(2^{13}-1)$$

$$=4096\times8191=33550336$$

の8桁の数で,各位の和は28です。($\overleftarrow{31}$, $\overrightarrow{17}$参照)

14

整数列大辞典 *A061645*

4番目の完全数8128の約数の個数は14個です。

$$8128=2^6\times(2^7-1)$$
$$=2^6\times127$$

2^7-1が素数であることと2^6の約数が7個あるからこの数の約数は14個です。(18, 26 参照)

15 整数列大辞典 $A000217$

完全数はすべて三角数です。三角数とは自然数を順に加えていった数列です。15は5番目の三角数です。

15=1+2+3+4+5

6=1+2+3

28=1+2+3+4+5+6+7

496は31番目，8128は127番目の三角数です。

(78 参照)

16 整数列大辞典 $A019279$

完全数を作る数式の2の累乗部分の数は「超完全数」といいます。この数は2回続けて約数の和を求めると元の数の2倍になる数です。

$$\begin{aligned}\sigma^2(16) &= \sigma(31)\\ &= 32\\ &= 16\times 2\end{aligned}$$

(4，64，88 参照)

「Wikipedia の超完全数の頁は自分が翻訳しました。」(Oz)

17 整数列大辞典 $A000668$

$2^{17}-1$は6番目のメルセンヌ素数です。

$$2^{17}-1 = 131071$$

この数からできる完全数は $2^{16}\times(2^{17}-1)$

$$\begin{aligned}&= 65536\times 131071\\ &= 8589869056\end{aligned}$$

の10桁の数で各位の和は64です。($\overleftarrow{13}$, $\overrightarrow{55}$参照)

18

整数列大辞典
$A030515$

約数を完全数個もつ最小の数は12です。18は約数を6個もつ2番目の数です。約数を28個もつ最小の数は960です。

$$18 = 2 \times 3^2$$
$$960 = 2^6 \times 3 \times 5$$

順	数	順	数	順	数	順	数
①	12	⑥	44	⑪	68	⑯	99
②	18	⑦	45	⑫	75	⑰	116
③	20	⑧	50	⑬	76	⑱	117
④	28	⑨	52	⑭	92	⑲	124
⑤	32	⑩	63	⑮	98	⑳	147

19

整数列大辞典
$A138828$

3番目の完全数496と4番目の完全数8128の各位の和はどちらも19です。

$$496 \to 4+9+6 = 19$$
$$8128 \to 8+1+2+8 = 19$$

5番目の完全数33550336の各位の和は28です。

(55, 73 参照)

20

整数列大辞典
$A063376$

完全数を作る数式の()内の符号を変えて指数部分を同じにすると2番目が20です。

$$\begin{aligned} 20 &= 2^2 \times (2^2+1) \\ &= 2^4 + 2^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$2^n \times (2^n+1)$ の形で表せる2番目の数です。

順	数	順	数	順	数
①	6	③	72	⑤	1056
②	20	④	272	⑥	4160

21

整数列大辞典
A034897

ハイパー完全数という数があります。これは $n=1+k(\sigma(n)-n-1)$ を満たす n で，例えば21の約数の和 $\sigma(21)$ は32，これから21と1を引くと10，結果2倍に1を加えると21になることから2–ハイパー完全数です。完全数は1–ハイパー完全数です。

22

整数列大辞典
A139228

完全数6と28の差が22です。(44 参照)

n	$2^{n-1}(2^n-1)$	差
2	6	
		22
3	28	
		92
4	120	
		376
5	496	
		1520
6	2016	
		6112
7	8128	

赤字は完全数です。

この数は以下の数式で表せます。

$$a_n=3\cdot 2^{2n-1}-2^{n-1}$$

「22の新たな性質発見！」(Oz)

23

整数列大辞典
A054723

23は9番目の素数です。しかし $2^{23}-1$ は合成数です。

$$2^{23}-1=8388607$$
$$=47\times 178481$$
$$2^{29}-1=536870911$$
$$=233\times 1103\times 2089$$

次の数は $p=37$ です。

$$2^{37}-1=137438953471$$
$$2^{41}-1=2199023255551$$

($\overleftarrow{11}$, $\overrightarrow{41}$参照)

24 整数列大辞典 $A059153$

完全数を作る数式の指数部の符号を変えるとどんな数が出てくるのでしょう。

$$N = 2^{n+1} \times (2^n - 1)$$

順	数	順	数
①	4	⑥	8064
②	24	⑦	32512
③	112	⑧	130560
④	480	⑨	523264
⑤	1984	⑩	2095104

「1984年に気づきたかった…」(Oz)

25 整数列大辞典 $A237286$

25は自身を除く約数の和が6になります。

$$\sigma(25) - 25 = 6$$

完全数の6以外で

$$\sigma(n) - n = 6$$

となる唯一の数です。この数が496になる数には652があります。

$$\sigma(652) - 652 = 496$$

「8128になる数は自身を除くと2つあります。整数列大辞典で確認して下さい。」(Oz)

26 整数列大辞典 $A061645$

26は5番目の完全数を作る指数部分13の2倍です。

$$33550336 = 2^{12} \times (2^{13} - 1)$$

$2^n - 1$ の部分は素数なので約数の個数は2個, 2^{n-1} の約数の個数は n 個なので完全数の約数の個数は $2n$ 個になります。(14参照)

27

完全数と立方数には密接な関係があります。6 を除く完全数は奇数の立方和で表せるからです。立方に着目して調べてみました。
(8128 参照)

$$496=\sum_{k=1}^{7}k^3-\sum_{k=1}^{4}k^k$$

$$8128=20^3+2^7$$

28

整数列大辞典 *A000396*

28 は2番目の完全数です。

「もし単位から始まり順次に 1 : 2 の比をなす任意個の数が定められ，それらの総和が素数になるようにされ，そして全体が最後の数にかけられてある数をつくるならば，その数は完全数であろう。」
『ユークリッド原論』第9巻 命題36

上の文は次のように置き換えられます。

「$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=M_n$ が素数ならば $M_n\times2^{n-1}$ は完全数になる。

29

整数列大辞典 *A135629*

29は完全数 28 に 1 を加えた数です。

順	完全数−1 (A135627)	完全数+1 (*A*135629)
①	5	7
②	27	29
③	495	497
④	8127	8129
⑤	33550335	33550337

「数を考えるときには前後の数も考慮しなければいけません。」(Oz)

30

整数列大辞典
A064987

完全数を作る数式
$2^{n-1}\times(2^n-1)$ は $n\times\sigma(n)$
を満たします。

n	$n\times\sigma(n)$	n	$n\times\sigma(n)$
1	1	9	117
2	6	10	180
3	12	11	132
4	28	12	336
5	30	13	182
6	72	14	336
7	56	15	360
8	120	16	496

$8128=64\times\sigma(64)$
「336 はかなりすごい数です。」(Oz)

31

整数列大辞典
A103901

3 番目のメルセンヌ素数が 31 です。($\overleftarrow{7}$, $\overrightarrow{13}$参照)

$$31=2^5-1$$

また自身が新たなメルセンヌ素数 (8 番目) を作る数です。($\overrightarrow{61}$参照)

$$2^{31}-1=2147483647$$

現在メルセンヌ素数は 49 個ですが，この性質をもつ数は 4 個です。

3, 7, 31, 127

32

整数列大辞典
A006516

完全数を作る数式に $n=6$ を代入すると32の因数が表れます。この数は完全数になれませんでした。(35 参照)

$$2^5\times(2^6-1)=32\times63$$
$$=2016$$

2016の約数の和は6552です。

$$6552\div2016=\frac{13}{4}=3.25$$

33 整数列大辞典 *A239546*

3 番目の完全数 496 の素因数の和が 33 です。

$$496 = 2^4 \times 31$$

順	完全数	素因数の和
①	6	5
②	28	9
③	496	33
④	8128	129
⑤	33550336	8193

「完全数の素因数の和は (メルセンヌ素数)+2 で表せます。また素因数の和が完全数になる最小の数は115です。」(Oz)

34 整数列大辞典 *A092336*

最小の完全数6と2番目の完全数 28 の和が 34 です。(35 参照)

順	完全数	総和
①	6	6
②	28	34
③	496	530
④	8128	8658
⑤	33550336	33558994

「総和は $2^{n-1}(2^n-1)$ からできる数をすべて含めないと数式で表すことができません。」(Oz)

35 整数列大辞典 *A171477*

完全数を作る数式を考察しました。(34 参照)

$$a_n = 2^{n-1} \times (2^n - 1)$$

n	$2^{n-1}(2^n-1)$	総和
1	1	1
2	6	7
3	28	35
4	120	155
5	496	651
6	2016	2667
7	8128	10795

総和は以下の式です。

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1}-1)(2^n-1)$$

36

整数列大辞典
$A007582$

完全数を作る数式の()内の符号を変えるとどんな数が出てくるのでしょう。

$$N=2^{n-1}\times(2^n+1)$$

n	数	n	数
1	3	6	2080
2	10	7	8256
3	36	8	32896
4	136	9	131328
5	528	10	524800

「2^n 番目の三角数です。」(Oz)

37

整数列大辞典
$A061193$

9 番目の完全数は 37 桁の数です。

$$2^{60}\times(2^{61}-1)$$
$$=2658455991569831744$$
$$654692615953842176$$

各位の和は190です。
($\overleftarrow{73}$, $\overrightarrow{54}$, 61, 99 参照)
この数は1883 年ロシアの数学者イヴァン・パヴシンによって発見されました。

38

メルセンヌ素数をつくる指数の数はどうして素数なのでしょう？

$$2^{38}-1=274877906943$$
$$=(2^2-1)\times174763\times(2^{19}-1)$$
$$=3\times174763\times524287$$

$2^{ab}-1$ は必ず 2^a-1 と 2^b-1 の因数をもつからです。

「証明は高校の数 II を勉強したら挑戦してみて下さい。」(Oz)

39
整数列大辞典 $A000668$

フランスの数学者エドゥアール・リュカ (1842–1891) は $2^{127}-1$ の自然数(39 桁)を手計算で 19 年かけて 1857 年に素数であることを確かめました。手計算で求めた素数の世界記録です。

$$2^{127}-1=170141183460469231731687303715884105727$$

($\overleftarrow{89}$, $\overrightarrow{99}$参照)

「リュカは素数判定法を開発し素数であることを示しました。」(Oz)

40
整数列大辞典 $A028403$

完全数を作る数式のすべての符号を変えるとどんな数が出てくるのでしょう。

$$N=2^{n+1}\times(2^n+1)$$

順	数	順	数
①	12	⑥	8320
②	40	⑦	33024
③	144	⑧	131584
④	544	⑨	525312
⑤	2112	⑩	2099200

「かなり美しい？ かな。」(Oz)

41
整数列大辞典 $A054723$

41 は 13 番目の素数です。しかし $2^{41}-1$ は合成数です。

$$2^{41}-1=2199023255551$$
$$=13367\times164511353$$
$$2^{37}-1=137438953471$$
$$=223\times616318177$$

次の数は $p=43$ です。

$$2^{43}-1=8796093022207$$

($\overleftarrow{23}$, $\overrightarrow{43}$参照)

42

整数列大辞典 *A019283*

42 は 2 回続けて約数の和を求めると元の数の 6 倍になります。

$$42 \to 96 \to 252$$

連続で約数の和を m 回求めて k 倍になる数を (m,k)-完全数といいます。42 は $(2,6)$-完全数です。完全数は $(1,2)$-完全数です。

$$\sigma^m(n) = kn$$

43

整数列大辞典 *A054723*

43 は 14 番目の素数です。しかし $2^{43}-1$ は合成数です。

$$2^{43}-1$$
$$= 8796093022207$$
$$= 431 \times 9719 \times 2099863$$

次の数は $p = 47$ です。

$$2^{47}-1$$
$$= 140737488355327$$

(←41, →47参照)

44

最小の完全数 6 と 2 番目の完全数 28 との約数の和の差が 44 です。

$$\sigma(28)-\sigma(6) = 56-12$$
$$= 44$$

2 番目は

$$\sigma(496)-\sigma(28) = 992-56$$
$$= 936$$

3 番目は 15264 です。

45

整数列大辞典
$A116541$

完全数28と496の両方に共通する性質に,約数を三角数の個数個をもつ三角数という性質があります。45は6個の約数をもつ三角数です。

順	数	順	数	順	数
①	1	⑥	325	⑪	4950
②	28	⑦	496	⑫	7260
③	45	⑧	2016	⑬	7381
④	153	⑨	3321	⑭	8256
⑤	171	⑩	4753	⑮	11628

46

現在メルセンヌ素数は49個みつかっていますが46番から49番の順番は暫定です。これは45番 ($p = 37156667$) から46番 ($p=42643801$) の間の素数をすべて調べきっていないため変更の可能性があるからです。($\overleftarrow{92}$, $\overrightarrow{49}$参照)

「現在 (2018年3月) は46番まで確定しました。」(Oz)

47

整数列大辞典
$A054723$

47 は 15 番目の素数です。しかし $2^{47}-1$ は合成数です。

$$
\begin{aligned}
&2^{47}-1\\
&=140737488355327\\
&=2351\times4513\times13264529
\end{aligned}
$$

次の数は $p = 53$ です。

$$
\begin{aligned}
&2^{53}-1\\
&=9007199254740991
\end{aligned}
$$

($\overleftarrow{43}$, $\overrightarrow{53}$参照)

48

整数列大辞典
$A077006$

48 の約数の和は 124 です。元の数と約数の和を比較したとき割合がそれ以前の数より大きくなる数です。

$124 \div 48 \fallingdotseq 2.5833\cdots$

$$\frac{\sigma(n)}{n} > \frac{\sigma(m)}{m} \quad (n > m)$$

順	n	順	n	順	n	順	n
①	1	④	6	⑦	36	⑩	120
②	2	⑤	12	⑧	48	⑪	180
③	4	⑥	24	⑨	60	⑫	240

49

新しい完全数をみつけることと最大のメルセンヌ素数をみつけることは奇数の完全数がみつかっていないため現在同値です。2017 年現在 49 個のメルセンヌ素数がみつかっています。よって現在の完全数は 49 個です。

「現在 (2018年3月) は仮50番目まで発見できています。」(Oz)

50

整数列大辞典
$A005100$
$A000040$

50は不足数です。不足数とは約数の和が元の数の 2 倍より小さくなる数です。(82, 95 参照)

順	数	順	数	順	数	順	数
①	1	⑨	10	⑰	21	㉕	32
②	2	⑩	11	⑱	22	㉖	33
③	3	⑪	13	⑲	23	㉗	34
④	4	⑫	14	⑳	25	㉘	35
⑤	5	⑬	15	㉑	26	㉙	37
⑥	7	⑭	16	㉒	27	㉚	38
⑦	8	⑮	17	㉓	29	㉛	39
⑧	9	⑯	19	㉔	31	㉜	41

51

整数列大辞典
A052220

51 の各位の和は完全数 6 です。各位の和が 6 になる 6 番目の数です。最小はもちろん 6,28 番目は600です。また各位の和が完全数 28 で最小は 1999, 6 番目の数は 3889, 28 番目は 5878 です。(55, 73 参照)

「各位の和が496になる最小の数は56桁の数です。」(Oz)

52

整数列大辞典
A120100

$\frac{1}{52}$ は小数で表すと6の循環節をもつ10番目の数です。(87参照)

$$\frac{1}{52} \fallingdotseq 0.01\underline{923076}\cdots$$

順	n	順	n	順	n	順	n
①	7	⑥	28	⑪	56	⑯	78
②	13	⑦	35	⑫	63	⑰	84
③	14	⑧	39	⑬	65	⑱	91
④	21	⑨	42	⑭	70	⑲	104
⑤	26	⑩	52	⑮	77	⑳	105

6桁の有限小数は$\frac{1}{64}$です。

53

整数列大辞典
A054723

53 は 16 番目の素数です。しかし $2^{53}-1$ は合成数です。

$$2^{53}-1$$
$$=9007199254740991$$
$$=6361\times69431\times20394401$$

次の数は $p=59$ です。

$$2^{59}-1$$
$$=576460752303423487$$

($\overleftarrow{47}$, $\overrightarrow{59}$参照)

54

整数列大辞典
A061193

10 番目の完全数は54桁の数です。

$$2^{88}\times(2^{89}-1)$$
$$=191561942608236107\,294793378084303638\,130997321548169216$$

各位の和は235です。

($\overleftarrow{37}$, $\overrightarrow{65}$, 88, 89 参照)

「この数は1911年アメリカの R･E･パワーズによって発見されました。12 番目が発見されてから 35 年後でした。」(Oz)

55

整数列大辞典
A138828

7 番目の完全数の各位の和が55です。この数は12桁の数です。($\overleftarrow{17}$, $\overrightarrow{73}$)

$$2^{18}\times(2^{19}-1)$$
$$=262144\times524287$$
$$=137438691328$$

順	完全数	各位の和	桁数
①	6	6	1
②	28	10	2
③	496	19	3
④	8128	19	4
⑤	33550336	28	8
⑥	8589869056	64	10

56

整数列大辞典
A020522

56 は完全数28の約数の和です。(68 参照)

$$56=2^3\times7$$
$$=2^3\times(2^3-1)$$
$$=2^6-2^3$$
$$=4^3-2^3$$

$2^n\times(2^n-1)$ の形で表せる 3 番目の数です。

順	数	順	数	順	数
①	2	④	240	⑦	16256
②	12	⑤	992	⑧	65280
③	56	⑥	4032	⑨	261632

57

57 は n^2+n+1 の形で表せます。

$$57=7^2+7+1$$

メルセンヌ素数をつくる指数部分の数がこの形で表せるかを調べました。(8191 参照)

順	p	n^2+n+1
②	3	1^2+1+1
④	7	2^2+2+1
⑤	13	3^2+3+1
⑧	31	5^2+5+1
⑳	4423	66^2+66+1

58

整数列大辞典 $A000203$

58の約数の和は90です。約数の和を求めるには素因数分解を使います。

$$58=2\times 29$$

約数の和を N とすると

$$N=(2^0+2^1)\times(29^0+29^1)$$
$$=3\times 30$$
$$=90$$

59

整数列大辞典 $A054723$

59 は,17 番目の素数です。しかし $2^{59}-1$ は合成数です。

$$2^{59}-1$$
$$=576460752303423487$$
$$=179951\times 3203431780337$$

次の数は $p=71$ です。

$$2^{71}-1$$
$$=2361183241434822606847$$
$$2^{67}-1$$
$$=147573952589676412927$$

($\overleftarrow{53}$, $\overrightarrow{71}$参照)

60

整数列大辞典
A219205

完全数を作る数式における $2^{n-1}\times(2^n-1)$ の定数部分 2 を変えるとどんな数が出現すると思いますか?

$$60=4^1\times(4^2-1)$$

m	数
3	2, 24, 234, 2160
4	3, 60, 1008
5	4, 120, 3100
6	5, 210, 7740
7	6, 336, 16758
8	7, 504, 32704

61

整数列大辞典
A000043

$2^{61}-1$ は 9 番目のメルセンヌ素数です。
(31, 89参照)

$2^{61}-1=2305843009213693951$

順	p	順	p	順	p
①	2	⑨	61	⑰	2281
②	3	⑩	89	⑱	3217
③	5	⑪	107	⑲	4253
④	7	⑫	127	⑳	4423
⑤	13	⑬	521	㉑	9689
⑥	17	⑭	607	㉒	9941
⑦	19	⑮	1279	㉓	11213
⑧	31	⑯	2203	㉔	19937

62

整数列大辞典
A139257

3 番目のメルセンヌ素数 31 の 2 倍が 62 です。このことは 3 番目の完全数 496 の素因数の積が 62 になることを表しています。

$$496=2^4\times(2^5-1)$$
$$=2^4\times31$$

順	素因数の積	順	素因数の積
①	6	④	254
②	14	⑤	16382
③	62	⑥	262142

63

整数列大辞典 *A135972*

63 はメルセンヌ数ですがメルセンヌ素数ではありません。(11 参照)

$$63 = 2^6 - 1 = 3^2 \times 7$$

順	メルセンヌ数	$2^p - 1$
①	1	$2^1 - 1$
④	15	$2^4 - 1$
⑥	63	$2^6 - 1$
⑧	255	$2^8 - 1$
⑨	511	$2^9 - 1$
⑩	1023	$2^{10} - 1$
⑪	2047	$2^{11} - 1$

「1以外は合成数です。素因数分解できますか？」(Oz)

64

整数列大辞典 *A019279*

64 は 4 番目の超完全数です。超完全数は以下の数式を満たす自然数 n です。(4, 16, 88 参照)

$$\sigma^2(n) = 2n$$

$$\sigma^2(64) = \sigma(127)$$

$$= 128$$

$$= 64 \times 2$$

順	数	順	数	順	数
①	2	③	16	⑤	4096
②	4	④	64	⑥	65536

65

11 番目の完全数は65桁の数です。

$$2^{106} \times (2^{107} - 1)$$

$$= 13164036458569648$$
$$33723975346045872$$
$$29102234723183869$$
$$43117783728128$$

各位の和は289です。

($\overleftarrow{54}$, $\overrightarrow{77}$, 89, 99 参照)

「この数は1914年アメリカの R·E·パワーズによって発見されました。パワーズは趣味で数学を愛好していました。」(Oz)

66

整数列大辞典
A014635

完全数はすべて偶数の六角数です。偶数の六角数 H_{2n} は次の式で表せます。

$$H_{2n} = 2n(4n-1)$$

順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	276	⑪	946
②	28	⑦	378	⑫	1128
③	66	⑧	496	⑬	1326
④	120	⑨	630	⑭	1540
⑤	190	⑩	780	⑮	1770

「8128は32番目です。また六角数は hexagonal number といいます。」(Oz)

67

1876 年リュカが $p = 67$ のときの $2^p - 1$ からできる数は素数判定法から合成数ということを示しました。1903 年アメリカの数学者コールが具体的な素因数分解を示しました。(99参照)

$$2^{67}-1 = 147573952589676412927$$
$$= 193707721 \times 761838257287$$

「素数でないことがわかっても具体的な因数がすぐにわかるわけではありません。」(Oz)

68

完全数 6 と 28 の約数の和の総和は 68 です。

$$\sigma(6)+\sigma(28) = 12+56$$
$$= 68$$

順	完全数	$\sigma(n)$	総和
①	6	12	12
②	28	56	68
③	496	992	1060
④	8128	16256	17316

(56 参照)

「倍積完全数を含めると異なる数が出現します。」(Oz)

$\boxed{69}$ 整数列大辞典 *A001065*

69 は約数の和が完全数 496 になる 427 と完全数 496 の差です。

$$496 - 427 = 69$$

順	数(n) ($A146542$)	約数の和 (完全数)	差(N)
①	5	6	1
②	12	28	16
③	427	496	69
④	10924032	33550336	22626304
⑤	16125952	33550336	17424384

$$N = \sigma(n) - n$$

(5, 12, 25 参照)

$\boxed{70}$ 整数列大辞典 *A005101*

70 は過剰数です。過剰数とは約数の和が元の数の 2 倍より大きくなる数の事です。70の約数は$1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70$で約数の和は144です。

$$144 > 70 \times 2 = 140$$

約数関数 σ を用いると

$$\sigma(n) > 2n$$

を満たす数です。

(80参照)

$\boxed{71}$ 整数列大辞典 *A054723*

71 は 20 番目の素数です。しかし $2^{71}-1$ は合成数です。

$$\begin{aligned} &2^{71}-1 \\ &= 2361183241434822606847 \\ &= 228479 \times 48544121 \times 212885833 \\ &2^{67}-1 \\ &= 147573952589676412927 \\ &= 193707721 \times 761838257287 \end{aligned}$$

次の数は $p = 79$ です。

$$\begin{aligned} &2^{79}-1 \\ &=604462909807314587353087 \end{aligned}$$

($\overleftarrow{59}$, $\overrightarrow{79}$参照)

72 整数列大辞典 *A241954*

連続して約数の和を求めていったとき6個の数が72になります。

$\sigma^m(n) = 72\ (m \geqq 1)$

あてはまる n は29, 30, 46, 51, 55, 71 で 29 は $m=2$, 他は$m=1$です。

順	数	順	数	順	数
①	72	④	508	⑦	936
②	372	⑤	816	⑧	1056
③	378	⑥	930	⑨	1178

「28個の最小は1440です。」(Oz)

73 整数列大辞典 *A138828*

8番目の完全数の各位の和が73です。19桁の数です。($\overleftarrow{55}$, $\overrightarrow{37}$参照)

2305843008139952128

順	各位の和	順	各位の和
⑦	55	⑭	1711
⑧	73	⑮	3520
⑨	190	⑯	5833
⑩	235	⑰	5968
⑪	289	⑱	8821
⑫	352	⑲	11548
⑬	1405	⑳	11791

「オイラーが発見しました。」(Oz)

74 整数列大辞典 *A060544*

31番目のメルセンヌ素数の上位2桁が74です。$p=216091$で約6万5千桁の数です。1985年にスローウィンスキーが発見しました。次の数は22万桁の数だったので次の発見まで7年間も待たなければなりませんでした。($\overleftarrow{85}$, $\overrightarrow{75}$参照)

75

整数列大辞典
A000043

32番目のメルセンヌ素数を表す指数 p の上位 2 桁が75です。$p=756839$ で約 22万桁の数です。この数からとうとう桁数が 10 万桁を突破しました。($\overleftarrow{74}$, $\overrightarrow{81}$, 85 参照)

「発見者は 31 番目と同じでスローウィンスキーです。この人はソフトウェアのエンジニアだったようです。」(Oz)

76

整数列大辞典
A138874

13 番目の完全数の下 2 桁は 76 です。

$$
\begin{aligned}
&2^{520}\times(2^{521}-1)\\
=\,&2356272345726734706578954899670990498847754785839260\\
&0710143027597506337283178622239730365539602600561360\\
&2555664625032701750528925780432155433824984287771524\\
&2701039449691866402864453412803383143979023683862403\\
&3171435922356643219703101720713163527487298747400647\\
&8019395871659364010874193756490579185494921605556469\\
&76
\end{aligned}
$$

314桁の数で各位の和は 1405です。($\overleftarrow{77}$, $\overrightarrow{99}$参照)

77

整数列大辞典
A061193

12 番目の完全数は77桁の数です。($\overleftarrow{65}$,$\overrightarrow{76}$,39,55)

$$
\begin{aligned}
&2^{126}\times(2^{127}-1)\\
=\,&14474011154664524427\\
&94637312608598848157\\
&36774914748358890663\\
&54349131199152128
\end{aligned}
$$

順	桁数	順	桁数	順	桁数
⑦	12	⑫	77	⑰	1373
⑧	19	⑬	314	⑱	1937
⑨	37	⑭	366	⑲	2561
⑩	54	⑮	770	⑳	2663
⑪	65	⑯	1327	㉑	5834

78

整数列大辞典
A014494

完全数はすべて偶数の三角数です。偶数の三角数は以下の式で表せます。(15, 66 参照)

$$N=\frac{(2n+1)(2n+1-(-1)^n)}{2}$$

順	数	順	数	順	数
①	6	⑦	120	⑬	378
②	10	⑧	136	⑭	406
③	28	⑨	190	⑮	496
④	36	⑩	210	⑯	528
⑤	66	⑪	276	⑰	630
⑥	78	⑫	300	⑱	666

「8128は63番目です。」(Oz)

79

整数列大辞典
A054723

71 は 22 番目の素数です。しかし $2^{79}-1$ は合成数です。

$$\begin{aligned}&2^{79}-1\\=\,&604462909807314587353087\\=\,&2687\times202029703\\&\times1113491139767\end{aligned}$$

次の数は $p=83$ です。

$$\begin{aligned}&2^{83}-1\\=\,&9671406556917\\&033397649407\end{aligned}$$

($\overleftarrow{71}$, $\overrightarrow{83}$参照)

80

整数列大辞典
A005101

n の約数の和が $2n$ よりも大きいとき n を過剰数といいます。80 の約数の和は186で 80 の 2 倍160より大きくなるので過剰数です。(70参照)

順	数	順	数	順	数	順	数
①	12	⑦	40	⑬	66	⑲	88
②	18	⑧	42	⑭	70	⑳	90
③	20	⑨	48	⑮	72	㉑	96
④	24	⑩	54	⑯	78	㉒	100
⑤	30	⑪	56	⑰	80	㉓	102
⑥	36	⑫	60	⑱	84	㉔	104

81

整数列大辞典
A060544

35番目のメルセンヌ素数の上位2桁が81です。$p=1398269$で約42万桁の数です。この数は初めてGIMPSプロジェクトで1996年に発見された数です。

Great **I**nternet **M**ersenne **P**rime **S**earch

「PCにソフトをインストールすれば参加することができます。」(Oz)

($\overleftarrow{75}$, $\overrightarrow{92}$, 85 参照)

82

整数列大辞典
A005100

82は不足数です。100以下の不足数は75個あります。(50, 95 参照)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		○	○	○	○	完	○	○	○	○
10	○	●	○	○	○	○	○	●	○	●
20	○	○	○	●	○	○	○	完	○	●
30	○	○	○	○	○	●	○	○	○	●
40	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○
50	○	○	○	●	○	●	○	○	○	●
60	○	○	○	○	○	●	○	○	○	●
70	○	●	○	○	○	○	○	●	○	●
80	○	○	○	●	○	○	○	●	○	●
90	○	○	○	○	○	●	○	○	○	●

(完:完全数, ○:不足数, ●:過剰数)

83

整数列大辞典
A054723

83は23番目の素数です。しかし$2^{83}-1$は合成数です。

$$2^{83}-1$$
$$=9671406556917033397649407$$
$$=167\times 57912614113275649087721$$

次の数は$p=97$です。

$$2^{97}-1$$
$$=158456325028528$$
$$675187087900671$$

($\overleftarrow{79}$, $\overrightarrow{97}$参照)

84

完全数6と28の最小公倍数は84です。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 6 & 28 \\ \hline & 3 & 14 \end{array}$$

$$2\times3\times14=84$$

28と496は3472, 6と496は1488, 3つの完全数の最小公倍数は10416です。

「もうすぐL.C.Mという言葉が復活するようです。」(Oz)

85

整数列大辞典 *A060544*

27番目のメルセンヌ素数の上位2桁が85です。$p=44497$で約1万3千桁の数です。1979年に発見され初めて1万桁を突破しました。($\overleftarrow{99}$, $\overrightarrow{74}$)

順	桁数	発見年
㉗	13395	1979年4月
㉛	65050	1985年9月
㉜	227832	1992年2月
㊳	2098960	1999年6月
㊺	11185272	2008年9月

86

整数列大辞典 *A134458*

メルセンヌ素数を表す指数の14番目と13番目の差が86です。(98参照)

順	$p_{n+1}-p_n$	順	$p_{n+1}-p_n$
①	1	⑪	20
②	2	⑫	394
③	2	⑬	86
④	6	⑭	672
⑤	4	⑮	924
⑥	2	⑯	78
⑦	12	⑰	936
⑧	30	⑱	1036
⑨	28	⑲	170
⑩	18	⑳	5266

87

$\dfrac{1}{87}$ を小数で表すと28の循環節をもつ3番目の数になります。(52参照)

$$\frac{1}{87}$$
$$\fallingdotseq 0.\underline{01149425287356}$$
$$\underline{32183908045977}\cdots$$

順	数	順	数	順	数	順	数
①	29	⑥	174	⑪	319	⑯	562
②	58	⑦	232	⑫	348	⑰	580
③	87	⑧	261	⑬	435	⑱	638
④	116	⑨	281	⑭	464	⑲	696
⑤	145	⑩	290	⑮	522	⑳	725

88

整数列大辞典
*A*090748

10 番目の完全数は 2 の累乗部分の指数が 88 です。よって 2^{88} は超完全数です。

$$2^{88}$$
$$=30948500982134$$
$$5068724781056$$

(4, 16, 54, 64 参照)

「累乗はperfect powerといいます。かっこいい！」(Oz)

89

整数列大辞典
*A*000043

$2^{89}-1$ は 10 番目のメルセンヌ素数です。

$$2^{89}-1$$
$$=61897001964269$$
$$0137449562111$$

次の 11 番目のメルセンヌ素数は $2^{107}-1$ です。

$$2^{107}-1$$
$$=16225927682921336$$
$$3391578010288127$$

($\overleftarrow{61}$, $\overrightarrow{39}$, 54, 65 参照)

90

整数列大辞典 A049094

メルセンヌ数 $2^{90}-1$ は平方因子をもちます。

$$\begin{aligned}&2^{90}-1\\=&3^3\times7\times11\times19\times31\\&\times73\times151\times331\times631\\&\times23311\times18837001\end{aligned}$$

$p=90$ のときは 3^2 の因子をもちますが,メルセンヌ数の未解決問題は「p が素数のとき平方因子があるか?」です。

91

整数列大辞典 A060544

91 は 5 番目の中心つき九角数です。他にはどんな数があるのでしょう。(10 参照)

順	数	順	数	順	数
①	1	⑧	253	⑮	946
②	10	⑨	325	⑯	1081
③	28	⑩	406	⑰	1225
④	55	⑪	496	⑱	1378
⑤	91	⑫	595	⑲	1540
⑥	136	⑬	703	⑳	1711
⑦	139	⑭	820	㉑	1891

「8128は43番目です。クリスマスのMMDD発見!」(Oz)

92

整数列大辞典 A138862

39 番目のメルセンヌ素数の上位 2 桁が92です。$p=13466917$ で約 400 万桁の数です。この数は21世紀になって初めてGIMPSで発見されたメルセンヌ素数です。($\overleftarrow{81}$, $\overrightarrow{46}$, 85 参照)

93

整数列大辞典
$A046528$

93はメルセンヌ素数を2つ使って

$$93 = 3 \times 31$$

と表すことができます。異なるメルセンヌ素数の積でできる6番目の数です。

順	数	順	数	順	数	順	数
①	1	⑤	31	⑨	381	⑬	3937
②	3	⑥	93	⑩	651	⑭	8191
③	7	⑦	127	⑪	889	⑮	11811
④	21	⑧	217	⑫	2667	⑯	24573

94

94は2桁の数における完全数6の補数です。Aの補数とは加えると桁が増える最小の数です。例えば1桁の数では6の補数は4です。

$$6+4=10$$

$$6+94=100$$

28の補数は72です。

$$28+72=100$$

95

整数列大辞典
$A005100$

95は不足数です。不足数とは約数の和が元の数の2倍より小さくなる数です。95の約数は1,5,19,95で約数の和は120です。(50, 82 参照)

$$120 < 95 \times 2 = 190$$

なので不足数です。

約数関数σを用いると

$$\sigma(n) < 2n$$

を満たす数です。

96 整数列大辞典 $A033845$

96 は素因数の積が完全数 6 になる 9 番目の数です。

$$96=2^5\times 3$$

順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	48	⑪	144
②	12	⑦	54	⑫	162
③	18	⑧	72	⑬	192
④	24	⑨	96	⑭	216
⑤	36	⑩	108	⑮	288

「素因数の積は6以外の完全数にはなりません。またこの数は $2^i\times 3^j$ $(i,j\geqq 1)$ で表せます。」(Oz)

97 整数列大辞典 $A054723$

97 は 25 番目の素数です。しかし $2^{97}-1$ は合成数です。(83参照)

$2^{97}-1$
$=158456325028528675187087900671$
$=11447$
$\times 13842607235828485645766393$

「p が合成数のときの素因数分解は何問できましたか？1 問でもできれば免許皆伝ですよ。整数列大辞典にはメルセンヌ数の最小素因数 (least prime factor) で $A136030$ に登録されています。」(Oz)

98 整数列大辞典 $A016027$

98 番目の素数は 521 でメルセンヌ素数をつくる 13 番目の素数です。

順	p	番目	順	p	番目
①	2	1	⑪	107	28
②	3	2	⑫	127	31
③	5	3	⑬	521	98
④	7	4	⑭	607	111
⑤	13	6	⑮	1279	207
⑥	17	7	⑯	2203	328
⑦	19	8	⑰	2281	339
⑧	31	11	⑱	3217	455
⑨	61	18	⑲	4253	583
⑩	89	24	⑳	4423	602

99 整数列大辞典 $A000043$

22 番目のメルセンヌ素数を表す指数 p の上位2桁が99です。$p=9941$ で約 2993 桁の数です。1963 年ギリースが発見しました。(39, 85参照)

順	桁数	発見年
⑧	10	1772年
⑫	39	1876年
⑬	157	1952年 1 月
⑲	1281	1961年 11 月
㉒	2993	1963年 5 月

100 整数列大辞典 $A000225$

$2^{100}-1$ はどんな数なんでしょう。

$$\begin{aligned}&2^{100}-1\\=\ &1267650600228229\\&401496703205375\end{aligned}$$

31桁の数で12個の素因数をもつ合成数です。$2^{100}+1$ は 7 個の素因数をもつ合成数です。

「だいたいでよければ2^{10}は1000として計算できます。」(Oz)

115

整数列大辞典
$A008472$

115 は異なる素因数の和が完全数 28 になる最小の数です。

$$115 = 5 \times 23$$

順	数	順	数	順	数
①	115	⑥	414	⑪	1064
②	138	⑦	532	⑫	1104
③	187	⑧	552	⑬	1242
④	266	⑨	575	⑭	1365
⑤	276	⑩	828	⑮	1656

「素因数の和が6になる数はありません。496になる最小の数は2455，8128になる最小は40615です。」(Oz)

120

整数列大辞典
$A144858$
$A045762$

完全数を作る数式において $n = 4$ のとき 120 です。完全数にならない 2 番目の数です。

$$120 = 2^3 \times (2^4 - 1)$$

n	数	n	数
1	1	6	2016
4	120	8	32640

(8，32 参照)

672

整数列大辞典
$A007691$

672 は倍積完全数です。$2^{n-1}(2^n - 1)$ の形でない最小の倍積完全数です。

$$672 = 2^5 \times 3 \times 7$$

$$30240 = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

一般に k 倍完全数の約数の逆数の和は k になります。これは

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{kn}{n} = k$$

から証明できます。

8128

整数列大辞典 *A002593*

8128 は 4 番目の完全数です。6 以外の完全数は奇数の立方和で表せます。

順	数	順	数
①	1	⑥	2556
②	28	⑦	4753
③	153	⑧	8128
④	496	⑨	13041
⑤	1225	⑩	19900

「証明は

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

からできます。」(Oz)

8191

2^p-1 の形のメルセンヌ素数とn^2+n+1との関係を調べてみました。4 つありました。

数	メルセンヌ素数形	n^2+n+1
3	2^2-1	1^2+1+1
7	2^3-1	2^2+2+1
31	2^5-1	5^2+5+1
8191	$2^{13}-1$	90^2+90+1

(57, 63 参照)

$2^{82589933}-1$

整数列大辞典 *A000043*

2018年12月7日 素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数とは

$$2^{82589933}-1=\underbrace{148894\cdots\cdots902591}_{\text{約 2486 万桁}}$$

です。

「素数判定に約1年かかるようですね。仮51番目の数です。」(Oz)

索引

あとがき

いかがでしたか？「数の話」の第 10 番目として完全数を考えました。旧約聖書冒頭に神さまは 6 日でこの世界を創ったという記述があります。夜空に浮かぶ月は約 28 日の周期で満ち欠けを繰り返します。また半径が 1 の円周の長さは 6.28 です。この本があなたの数への興味・関心を深める一冊となればこれ以上の喜びはありません。

「発行日を2016年6月28日にしたかった。」

2017 年 10 月 13 日

小澤茂昌

完全数の話

2017 年 10 月 13 日 Ver1.0 第 1 刷発行

著者 小澤 茂昌（おざわ しげまさ）
発行者 小澤 茂昌
発行所 和泉書院
郵便振替 00850-0-69925

定価はありません。

Web-page:http://furano.uijin.com/index.html
mail: furano@po2.across.or.jp

6

整数列大辞典
A000384

6 以外の完全数は奇数の立方和で表せます。6はなぜ表せないのか？

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

ここでn^2をmとおくと

$$a_m = m(2m-1)$$

これは六角数を表す数式です。六角数においてn^2番目の数が奇数の立方和になります。6 は $\sqrt{2}$ 番目です。

(66 参照)

13

整数列大辞典
A055012

13の各位の立方和は完全数28です。28になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	13	⑤	301	⑨	1300
②	31	⑥	310	⑩	3001
③	103	⑦	1003	⑪	3010
④	130	⑧	1030	⑫	3100

「各位の立方和が完全数 6 になる最小の数はR_6です。」(Oz)

(31，466，1115 参照)

「2001年が平成13年で,2019年が平成31年です。」(Oz)

14

整数列大辞典
A133028

14 は完全数 28 を2で割った商です。

$$14 = 28 \div 2$$

順	数	完全数
①	3	6
②	14	28
③	248	496
④	4064	8128
⑤	16775168	33550336

「平成の次の元号が大化から248番目だったので,何か性質はないかと調べていたら気づきました。」(Oz)

$\boxed{18}$ 整数列大辞典 *A103897*

18 は完全数 6 の 3 倍です。(24, 56 参照)

$$18 = 3 \times 2^1 \times (2^2 - 1)$$

順	数	倍積完全数
①	3	1
②	18	6
③	84	28
④	360	120
⑤	1488	496
⑥	6048	2016
⑦	24384	8128

「この性質を発見できてルルドの聖母が18回出現したことに納得しました。」(Oz)

$\boxed{24}$ 整数列大辞典 *A064510*

24 の約数を小さい順に加えていくと 24 になります。

$$24 = 1+2+3+4+6+8$$

順	n	順	n
①	1	⑥	2016
②	6	⑦	8128
③	24	⑧	8190
④	28	⑨	42336
⑤	496	⑩	45864

「完全数になれなかった数とみることができます。久しぶりにプログラム作って確認しました。」(Oz)

$\boxed{31}$

31の各位の立方和は完全数28です。$a^0+a^1+a^2$ の形の数で各位の立方和が完全数になる 2 番目の数です。(13 参照)

順	a	n	完全数
①	3	13	28
②	5	31	28
③	177	31507	496
④	806	650443	496

「聖書においてあまりにも13が重宝されているので調べていたら気づきました。」(Oz)

36

整数列大辞典
*A*247111

36の約数の和91から元の数36を引いてもう一度約数の和を求めると36の2倍になります。

$$\sigma(\sigma(36)-36) = \sigma(55) = 72$$

$$\sigma(\sigma(n)-n) = 2n$$

「完全数はすべてこの数列に含まれます。現在完全数以外の数でこの数列に含まれる数は36しかありません。」(Oz)

38 その 2

メルセンヌ素数をつくる指数の数は素数でなければならない証明です。

$$\begin{aligned} &2^{ab}-1 \\ &=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}+\cdots+2^{(b-1)a}) \end{aligned}$$

「数学 II の二項定理と数学 B の数列を学習しないとイメージがつかめないかなぁ〜。$b = 3$ のときの式を書いておきます。」(Oz)

$$\begin{aligned} &2^{3a}-1 \\ &=(2^a)^3-1 \\ &=(2^a-1)((2^a)^2+2^a+1) \\ &=(2^a-1)(1+2^a+2^{2a}) \end{aligned}$$

(38 参照)

47

整数列大辞典
*A*007954

47の各位の積は完全数28です。各位の積が28になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	47	⑥	272	⑪	741
②	74	⑦	417	⑫	1147
③	147	⑧	471	⑬	1174
④	174	⑨	714	⑭	1227
⑤	227	⑩	722	⑮	1272

4 桁最大は 7411 です。

「496は31が8128は127が因数なのであてはまる数はありません。」(Oz)

61

整数列大辞典
A199988
A107692

61の各位の積は完全数6です。各位の積が6になる5番目の数です。

順	数	順	数	順	数	順	数
①	6	⑥	116	⑪	231	⑯	1123
②	16	⑦	123	⑫	312	⑰	1132
③	23	⑧	132	⑬	321	⑱	1161
④	32	⑨	161	⑭	611	⑲	1213
⑤	61	⑩	213	⑮	1116	⑳	1231

4桁最大は6111です。

「各位の積は専門的には"総乗"っていいます。」(Oz)

62

整数列大辞典
A096360

62は完全数496の約数です。

$$496 = 8 \times 62$$

順	約数	完全数	順	約数	完全数
③	3	6	⑫	32	8128
④	4	28	⑬	62	496
⑤	6	6	⑭	64	8128
⑥	7	28	⑮	124	496
⑦	8	496	⑯	127	8128
⑧	14	28	⑰	128	33550336
⑨	16	496	⑱	248	496
⑩	28	28	⑲	254	8128
⑪	31	496	⑳	256	33550336

「令和は248番目の元号です。」(Oz)

90

整数列大辞典
A125310

完全数の約数はすべて不足数です。90の約数の中で不足数の約数だけを加えると90になります。

$90 = 1+2+3+5+9+10+15+45$

「90以外はすべて完全数です。整数列大辞典のコメント欄には「90以外ないのかなぁ？」と書いてありました。"不足完全数"と命名したいようでした。」(Oz)

112

整数列大辞典
*A*003132

112の各位の平方和は完全数6です。6になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	112	⑤	1021	⑨	1210
②	121	⑥	1102	⑩	2011
③	211	⑦	1120	⑪	2101
④	1012	⑧	1201	⑫	2110

「2011年に気づきたかった。」(Oz)

(1115 参照)

140

整数列大辞典
*A*074247

140の約数の調和平均は5で素数です。完全数の約数の調和平均は素数です。完全数以外では140は最小の数です。

順	数	平均	順	数	平均
①	6	2	⑤	2970	11
②	28	3	⑥	8128	7
③	140	5	⑦	27846	17
④	496	5	⑧	105664	13

「約数の調和平均とは (約数の個数)÷(約数の逆数和) です。」(Oz)

364

整数列大辞典
*A*090777

364 はその平方数を約数の和で割ったとき整数になる 5 番目の数です。倍積完全数を除くと最小です。

$$364^2 \div \sigma(364) = 169$$

順	数	順	数	順	数
①	1	⑥	496	⑪	1782
②	6	⑦	672	⑫	2280
③	28	⑧	840	⑬	3276
④	120	⑨	1080	⑭	3472
⑤	364	⑩	1488	⑮	7440

$\boxed{466}$

整数列大辞典
A055012

466の各位の立方和は完全数496です。496になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	466	⑤	1375	⑨	1753
②	646	⑥	1537	⑩	3157
③	664	⑦	1573	⑪	3175
④	1357	⑧	1735	⑫	3517

4桁最大は7531です。
(13参照)

$\boxed{1115}$

整数列大辞典
A003132

1115の各位の平方和は完全数28です。28になる最小の数です。

順	数	順	数	順	数
①	1115	⑤	2224	⑨	3313
②	1151	⑥	2242	⑩	3331
③	1333	⑦	2422	⑪	4222
④	1511	⑧	3133	⑫	5111

(13, 112参照)

$\boxed{2^{77232917}-1}$

整数列大辞典
A000043

2017年12月26日素数探索プロジェクト「GIMPS」は新たな最大素数が発見されたと発表しました。その数とは

$$2^{77232917}-1=\underbrace{467333\cdots\cdots179071}_{\text{約 2325 万桁}}$$

です。

「人類はようやく50個の完全数をみつけることができました。」(Oz)