

## 4.11 数が描く絵

### 4.11.1 ウラムの螺旋 (Ulam spiral)

素数を勉強していったら「ウラムの螺旋」に出会いました。まずはこの「ウラムの螺旋」について解説します。下の表のように1を取り囲むようにして数を並べます。

...	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

次に1と合成数を消して素数だけを取り出します。

...			97						
				61		59			
	37						31		89
67		17				13			
			5		3		29		
		19			2	11		53	
	41		7						
71				23					
	43				47				83
73						79			

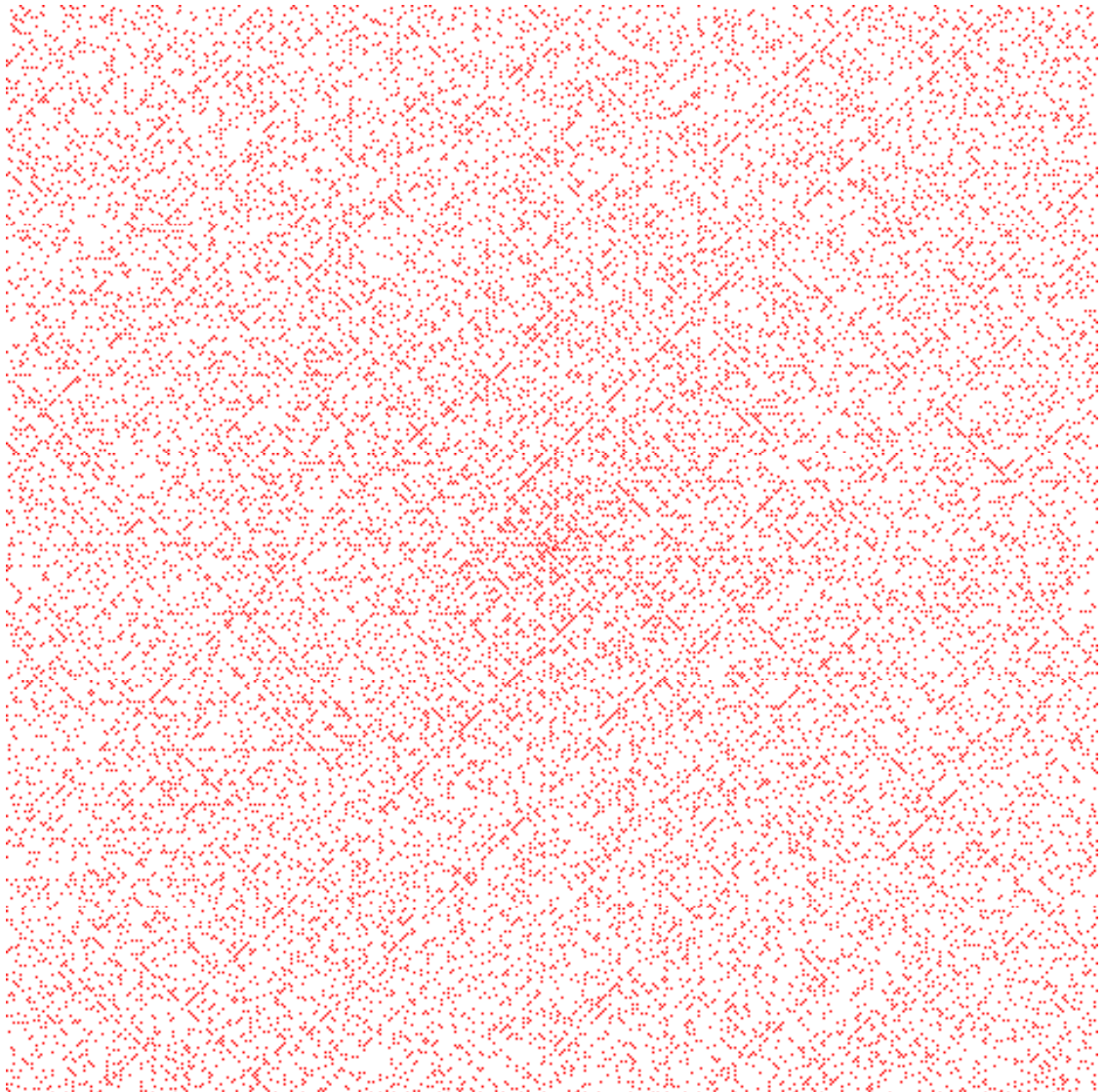
最後に素数に色をつけて完成です。

			97						
				61		59			
	37						31		89
67		17				13			
			5		3		29		
		19			2	11		53	
	41		7						
71				23					
	43				47				83
73						79			

授業は生徒に数表と対象となる数の一覧を配布して、マーカーで印を付けていくだけです。作業はだいたい30分位です。残りの時間はもっと大きなキャンバスに描いた絵(次頁参照)を紹介してあげてください。

#### 4.11.2 ウラムの螺旋 (素数)

下の図はコンピュータグラフィックで1ピクセルあたりに1つの数を対応させた図(480×480)です。約23万個の数キャンバスに約20000個の素数を描いた絵です。



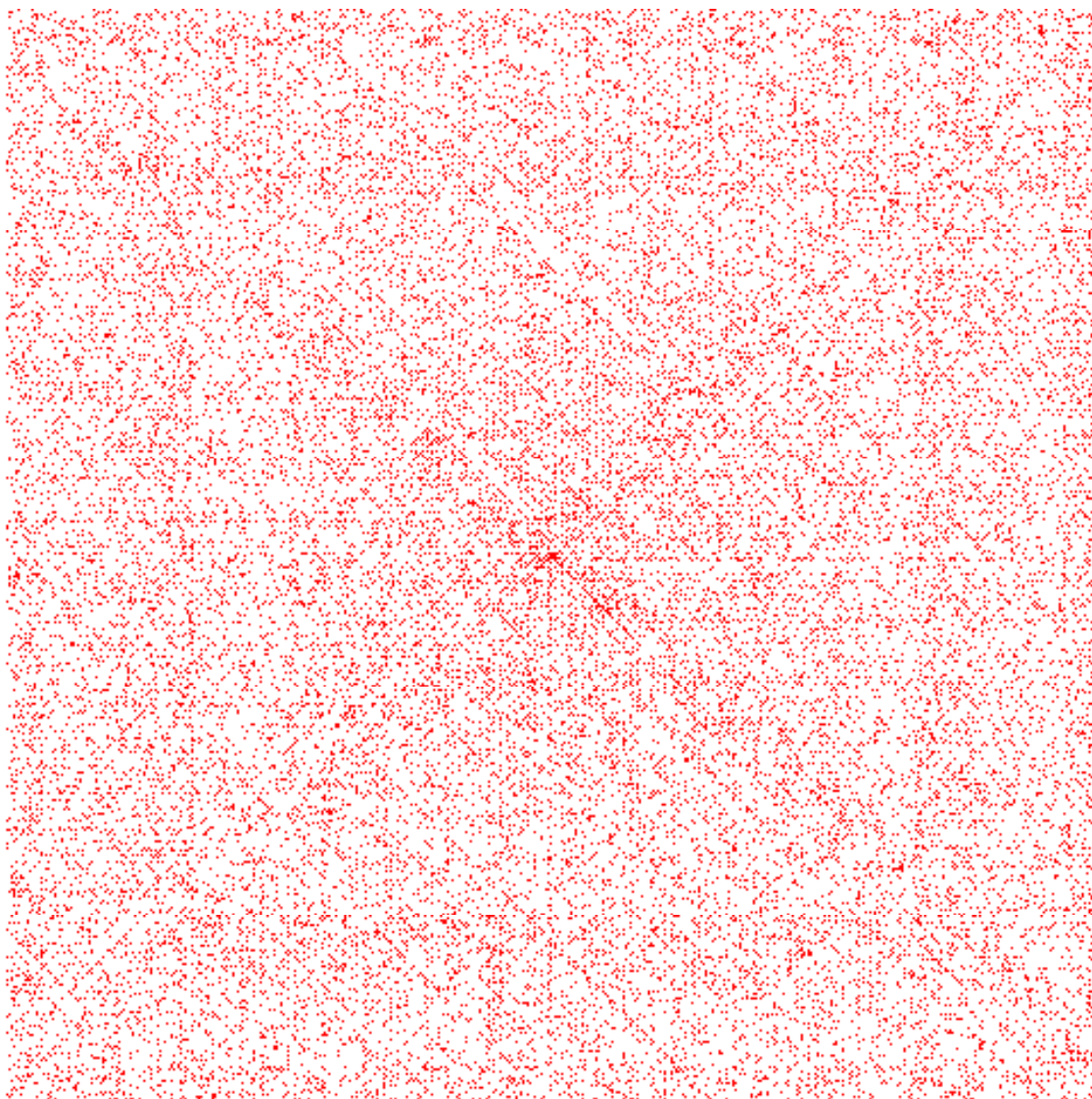
この絵を見てどんなことを感じますか？線が見えるということはそこには数学的な性質があるということです。自分は神様が書いた絵だと感じました。次に他の数で試してみましょう。下の表は各数の個数をまとめた表です。

数	~ 100	~ 1000	~ 10000	~ 100000
素数	25	169	1229	9592
ハーシャッド数	33	213	1538	11872
楔数	5	135	1800	19919

注意 ハーシャッド数とは各位の和で自分自身を割り切ることができる数で、楔数は素因数分解したとき異なる3つの素因数の積で表せる数です。

### 4.11.3 ウラムの螺旋 (ハーシャッド数)

ウラム螺旋形式のハーシャッド数です。

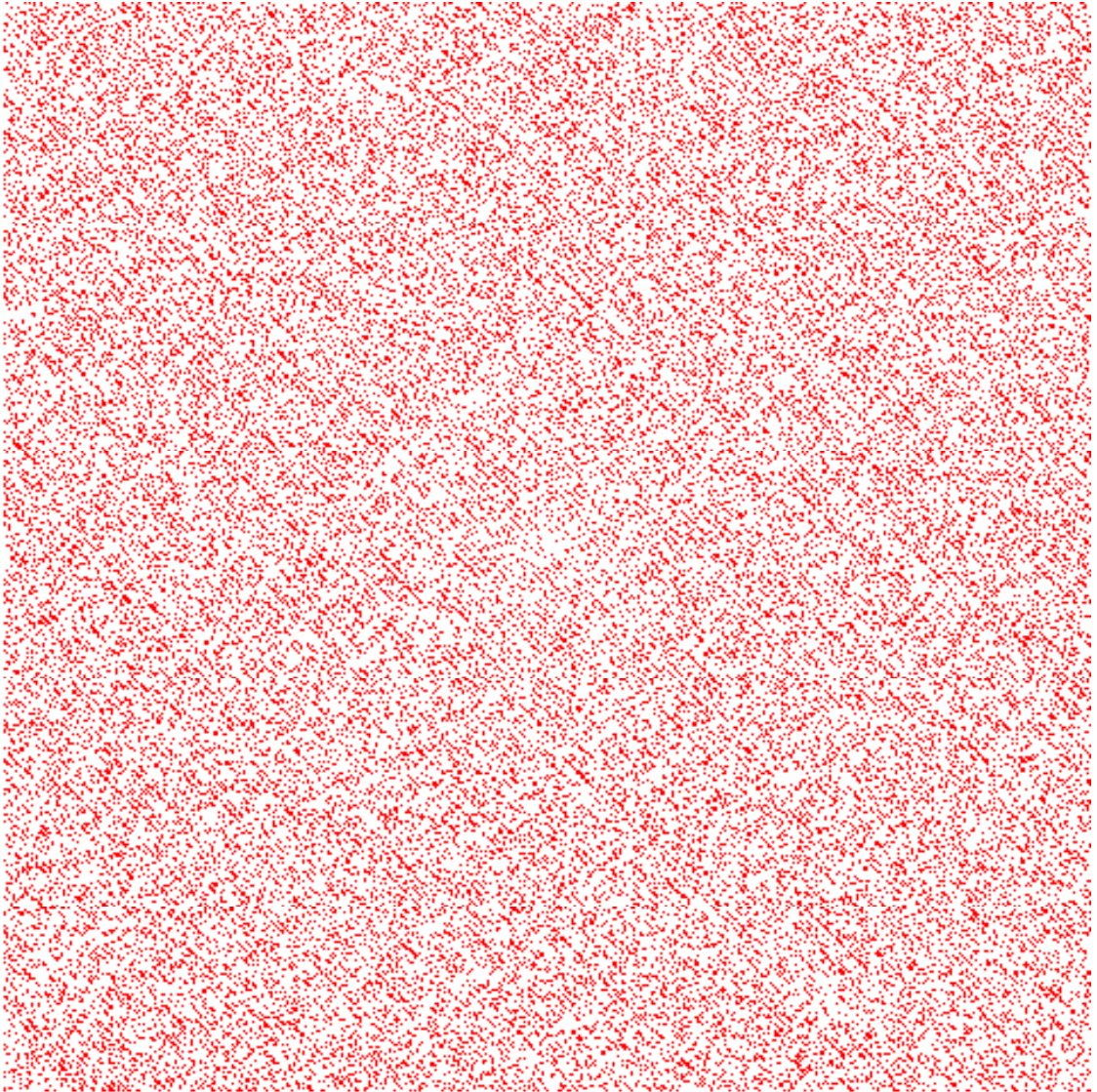


ウラム螺旋はどのように数が出現するのかまとめてみました。以下の表は基準1からみた数の位置です。

方向	具体的な数	数の形	オンライン数列	素数列
右横	2, 11, 28, 53, 86, 127, 176, 233,...	$4n^2 - 3n + 1$	A054552	A168022
右上	3, 13, 31, 57, 91, 133, 183, 241,...	$4n^2 - 2n + 1$	A054554	A073337
上	4, 15, 34, 61, 96, 139, 190, 249,...	$4n^2 - n + 1$	A054556	A168023
左上	5, 17, 37, 65, 101, 145, 197, 257,...	$4n^2 + 1$	A053755	A002496
左横	6, 19, 40, 69, 106, 151, 204, 265,...	$4n^2 + n + 1$	A054567	A168025
左下	7, 21, 43, 73, 111, 157, 211, 273,...	$4n^2 + 2n + 1$	A054569	A168026
下	8, 23, 46, 77, 116, 163, 218, 281,...	$4n^2 + 3n + 1$	A033951	A168027
右下	9, 25, 49, 81, 121, 169, 225, 289,...	$(2n + 1)^2$	A016754	

#### 4.11.4 ウラムの螺旋 (楔数)

ウラム螺旋形式の楔数です。



#### 4.11.5 ウラム螺旋表示プログラム

ウラム螺旋において素数を表示する U-BASIC のプログラムのソースです。なお Windows10 において U-BASIC を起動したいときには 32 ビット, 64 ビットどちらも MS-DOS プログラムを仮想実行するエミュレーター DOSBox から実行して下さい。U-BASIC は 32bit であれば通常動作しますがグラフィック命令を含む場合にはエミュレーターが必要です。

```
100  '
110  ' Ulam spiral program
120  ' ウラムの螺旋表示プログラム
130  ' 2018. 2.25 by Shigemasa Ozawa
140  '
300  console ,,0
310  '
320  X=319:Y=239:N=1:U=1:C=-1:M=1
330  if N=1 or prmdiv(N)<>N then goto 350
340  pset (X,Y),4
350  C=C+1:N=N+1:if Y<0 then end
360  if M=1 then goto 400
370  if M=2 then goto 410
380  if M=3 then goto 420
390  goto 430
400  if C<U then X=X+1:goto 330 else C=0:M=M+1
410  if C<U then Y=Y-1:goto 330 else C=0:M=M+1
420  if C<U+1 then X=X-1:goto 330 else C=0:M=M+1
430  if C<U+1 then Y=Y+1:goto 330 else C=0:M=1:U=U+2:goto 400
```

330 行が表示するしないを判断する行ですのでこの部分を変更すれば他の数も表示することができます。例えばハーシャッド数は

```
330  D=0
332  for I=1 to len(str(N))-1
334    D=D+val(mid(str(N),I+1,1))
336  next I
338  if N/D-int(N/D)<>0 then goto 350
```

とすればできます。楔数は

```
330  D1=prmdiv(N):if D1=N then goto 350
332  D2=prmdiv(int(N/D1)):if D2=int(N/D1) or D2=D1 then goto 350
334  D3=prmdiv(int(N/D1/D2)):if D3<>int(N/D1/D2) or D3=D2 then goto 350
```

となります。簡単なプログラムですので練習がてら挑戦してみてください。

#### 4.11.6 中心つき四角数形 (素数)

中心つき四角数形において素数はどのような形になるのでしょうか。中心つき四角数形とは以下のような数の並びです。

$2n^2 - n + 2$ (A033816)										
	159	125	95	69	47	67	91	119	151	187
	126	96	70	48	30	46	66	90	118	150
	97	71	49	31	17	29	45	65	89	117
	72	50	32	18	8	16	28	44	64	88
	51	33	19	9	3	7	15	27	43	63
$2n^2 + 2$ (A005893)	34	20	10	4	1	2	6	14	26	42
	53	35	21	11	5	13	25	41	61	85
	76	54	36	22	12	24	40	60	84	112
	103	77	55	37	23	39	59	83	111	143
	134	104	78	56	38	58	82	110	142	178
$2n^2 + n + 2$ (A096376)										

これをコンピュータグラフィック (640×480) で表したものが以下の図です。最大数は約 200000 です。



#### 4.11.7 中心つき四角数一筆書き形 (素数)

中心つき四角数の一筆書き形において素数はどのような形になるのでしょうか。中心つき四角数一筆書き形とは以下のような数の並びです。

$2n^2+1$ (A090698)									
167	132	101	74	51	72	97	126	159	196
133	102	75	52	33	50	71	96	125	158
103	76	53	34	19	32	49	70	95	124
77	54	35	20	9	18	31	48	69	94
55	36	21	10	3	8	17	30	47	68
$2n^2+n+1$ (A084849)	37	22	11	4	1	2	7	16	29
	57	38	23	12	5	6	15	28	45
	81	58	39	24	13	14	27	44	65
	109	82	59	40	25	26	43	64	89
	141	110	83	60	41	42	63	88	117
									150
$n^2+(n+1)^2$ (A001844)									
$2n^2-n+1$ (A130883)									

これをコンピュータグラフィック (640×480) で表したものが以下の図です。最大数は約 210000 です。

