3.3.3　3 次方程式解の公式

2 次方程式解の公式は中学 3 年生で学びますが，2 次方程式を勉強するんだったらその次の 3 次方程式だって知っておく位は勉強した方がいいんじゃないかと思いまとめました。ここでは一般に知られている 2 次の項をなくしたカルダノの公式ではなく，方程式の係数をそのまま使用する解の公式を紹介します。

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解 $x_1,\ x_2,\ x_3$ は

$$\begin{cases} X=-27a^2d+9abc-2b^3 \\ Y=3ac-b^2 \end{cases}$$

とするとき

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3a}\Big(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \\ x_2=\dfrac{1}{3a}\Big(\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \\ x_3=\dfrac{1}{3a}\Big(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \end{cases}$$

と表せる。上の式は $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ より

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3a}\Big(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \\ x_2=\dfrac{1}{3a}\Big(-\omega\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}+\omega^2\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \\ x_3=\dfrac{1}{3a}\Big(-\omega^2\cdot\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}{\sqrt[3]{2}}+\omega\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{X^2+4Y^3}+X}}-b\Big) \end{cases}$$

と変形できる。具体例で考察してみよう。

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$ は解 $x=1,\ x=2,\ x=3$ をもつ。これを一般形に直すと

$x^3-6x^2+11x-6=0$

より $a=1,\ b=-6,\ c=11,\ d=-6$

$$\begin{aligned} X&=-27a^2d+9abc-2b^3 \\ &=-27\times1^2\times(-6)+9\times1\times(-6)\times11-2\times(-6)^3 \\ &=162-594+432 \\ &=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y&=3ac-b^2 \\ &=3\times1\times11-(-6)^2 \\ &=33-36 \\ &=-3 \end{aligned}$$

よって $X=0,\ a=1,\ b=-6$ を x_1 の式に代入すると

$$\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{3\times1}\Big(\frac{\sqrt[3]{\sqrt{4Y^3}}}{\sqrt[3]{2}}-\frac{\sqrt[3]{2}\,Y}{\sqrt[3]{\sqrt{4Y^3}}}-(-6)\Big) \\ &=\frac{1}{3}\Big(\frac{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{Y}}{2^{\frac{1}{3}}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}\,Y}{2^{\frac{1}{3}}\sqrt{Y}}+6\Big) \\ &=\frac{1}{3}(\sqrt{Y}-\sqrt{Y}+6) \\ &=2 \end{aligned}$$

ようやく 3 つある解の 1 つを求めることができました。

$\sqrt{Y} = \sqrt{3}\, i$ より

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}(-\omega\sqrt{Y} + \omega^2\sqrt{Y} + 6) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \times \sqrt{3}\,i + \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \times \sqrt{3}\,i + 6\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}\,i + 3}{2} + \frac{-\sqrt{3}\,i + 3}{2} + 6\right) \\ &= \frac{1}{3} \times (3+6) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{3}(-\omega^2\sqrt{Y} + \omega\sqrt{Y} + 6) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} \times \sqrt{3}\,i + \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \times \sqrt{3}\,i + 6\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}\,i - 3}{2} + \frac{-\sqrt{3}\,i - 3}{2} + 6\right) \\ &= \frac{1}{3} \times (-3+6) \\ &= 1 \end{aligned}$$

どうしてこのような解の公式が導き出されるのかは省略しました。あくまで 2 次方程式の解の公式を難しく感じている 3 年生に対して，3 次方程式の解の公式を紹介すれば 2 次方程式の解の公式が簡単に思えるのでは…と感じてまとめました。自分なりに少し変形しました。学術書とは少し異なるかもしれません。お断りしておきます。

3 次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解 $x_1,\ x_2,\ x_3$ は

$$\begin{cases} X = -27a^2d + 9abc - 2b^3 \\ Y = 3ac - b^2 \\ Z = \dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{X^2 + 4Y^3} + X}}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

とするとき 3 つの解は

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3a}\left(Z - \dfrac{Y}{Z} - b\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{3a}\left(-\omega Z + \omega^2\dfrac{Y}{Z} - b\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{3a}\left(-\omega^2 Z + \omega\dfrac{Y}{Z} - b\right) \end{cases}$$

$a = 1$ のとき

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}\left(Z - \dfrac{Y}{Z} - b\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{3}\left(-\omega Z + \omega^2\dfrac{Y}{Z} - b\right) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}\left(-\omega^2 Z + \omega\dfrac{Y}{Z} - b\right) \end{cases}$$

これ以上簡単にならないかな？