4.12 普段の授業に疲れたら…

4.12.1 学習指導案

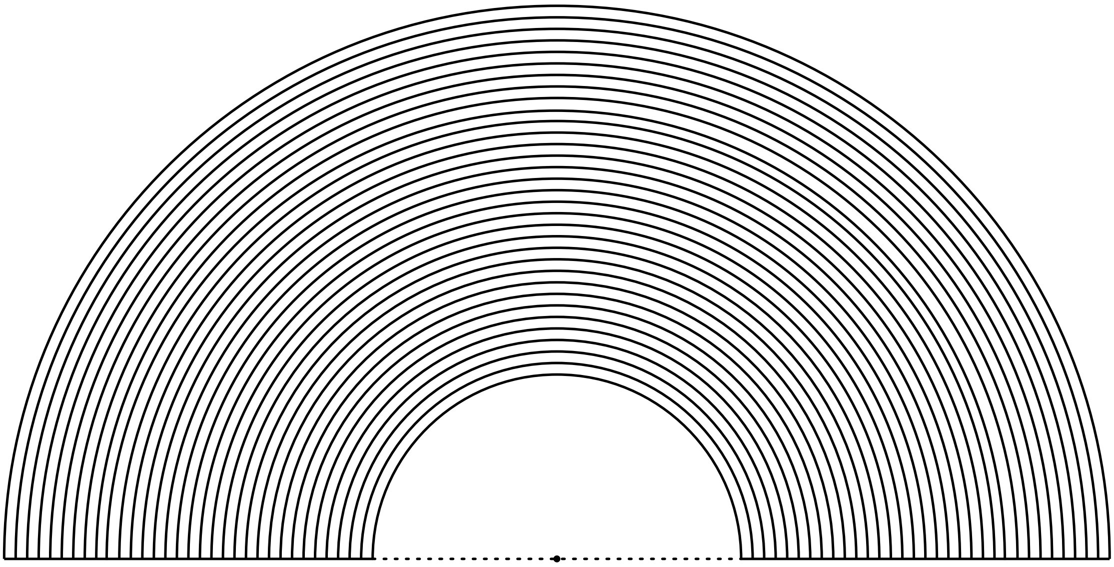
教材名　式の計算 (学年問わず)

目　標　トラックの外側のコースのスタート位置はどうして内側よりも前になるのかを体感し，その理由を何らかの手立て (実測計算，文字を使った説明等) を用いて理解する。

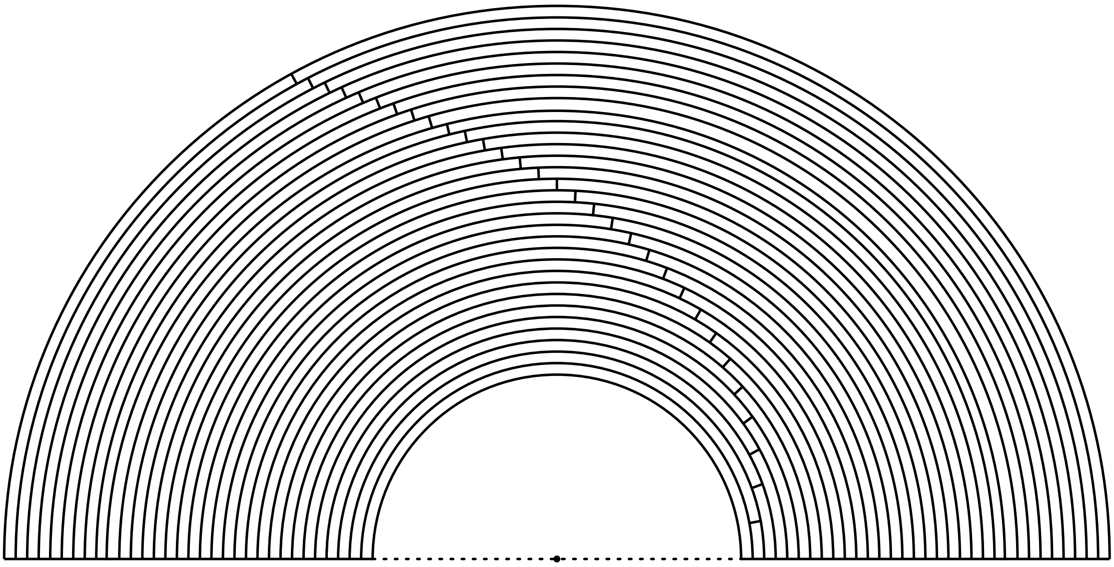
学習活動	備考
問. さぁみんな，体育大会が近づいてきた。今日はどうして外側のコースの人は内側のコースの人よりも前でスタートするのかを体感してもらいたい。まずは直線コースで自分の歩幅を測ってみよう。	･電卓と記録用紙を持参 ･本時は体育大会で使用するコースがグランドに描かれてある時期がいい
測り方. (1)直線 50　を何歩で歩くことができるか測定する。 (2)カーブを含む 100　の第 1 コース，第 2 コース，第 3 コースを何歩で歩くことができるか測定する。	･第 2 コース，第3 コースの測るスタート位置は第 1 コースと同じ位置
問. コース幅が 1　のときどれだけスタート位置を前に動かさなければいけないのだろう？ ・先生，カーブの半径は何　なんですか？ ・半径は r　としてもいいんじゃないか？ ・$\pi(r+1)-\pi r=\pi$ だから π　だけ前にでるんだ。	･メジャーを用意しておく ･この辺から教室に戻ってもいい
問. 外側のコースの人は π　だけスタート位置をずらすことはわかったけど，それだとずーっと外側のコースの人はいつかゴールに着いてしまうんじゃないだろうか？ (コース図を見せた後) 外側のコースの人は隣のコースの人より同じ π　だけ前に出ているのに，最後の方はどうして最初よりもなかなか前にすすまないのだろう？	

大雑把な指導案で申し訳ない。最初の発問は教室でそしてグランドという流れでもいいと感じる。しかしグランドでの授業は生徒指導がきちんとできないとお説教だらけの授業になってしまうかもしれない。自分は生徒指導にちょっと自信がないと感じた人は少人数で行っている集団で試してみるのもいいだろう。「どうして外側のコースの人は内側のコースの人より前でスタートするのかなぁ～？」という疑問をきちんともつことができれば自分から問題解決に向かってがんばるのではと感じます。

4.12.2　コース図その 1



4.12.3　コース図その 2



最後の問のイメージができない生徒のために図を作成した。ある程度までは前に出ているような感じだが，ある所から横にずれているだけだというイメージがもてればいいと思う。最後，教室で何らかのメディアを使って表示させれば，感じ取れると思います。

余談で…。この図を見ていたら「スタート位置を表す式はどうなるのだろう？」っていう疑問が浮かんだ。半径 R，第 n コースの幅 a として求めるとスタートラインと原点を結んだ角度 θ は $\theta = 180^\circ - \dfrac{R}{R+a(n-1)} \times 180^\circ$ になる。

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - \frac{R}{R+a(n-1)} \times 180^\circ \\ x^2+y^2 &= (R+a(n-1))^2 \\ x &= k\cos\theta \\ y &= k\sin\theta \end{aligned}$$

以上のことより

$$x = (R + a(n-1))\cos\left(180^\circ - \frac{R}{R + a(n-1)} \times 180^\circ\right)$$
$$y = (R + a(n-1))\sin\left(180^\circ - \frac{R}{R + a(n-1)} \times 180^\circ\right)$$

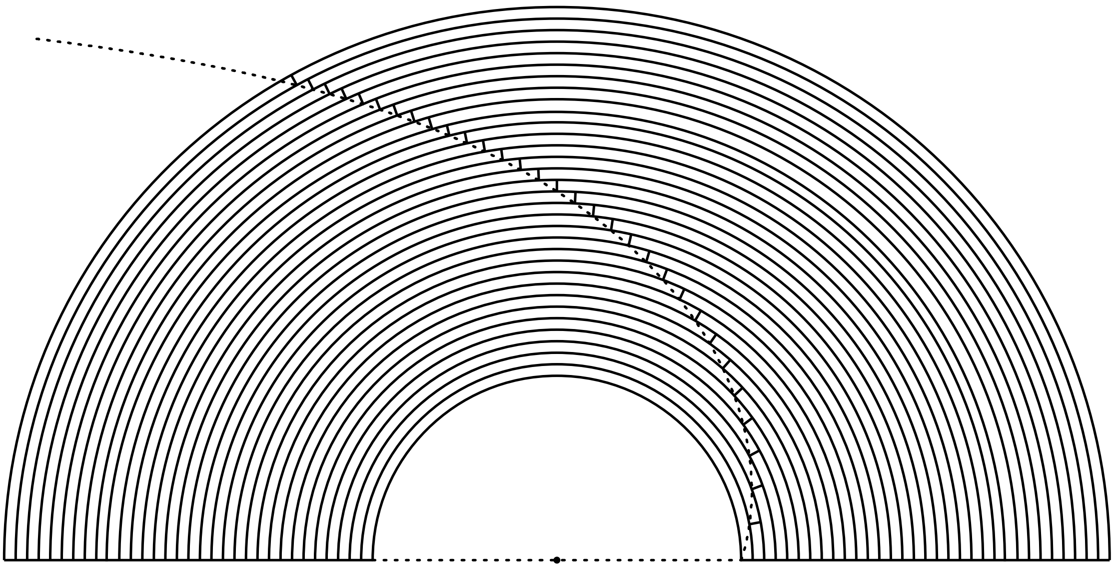
ちょっと式変形して角度をラジアンにすると

$$\begin{cases} x = -(R + a(n-1))\cos\left(\dfrac{\pi R}{R + a(n-1)}\right) \\ y = (R + a(n-1))\sin\left(\dfrac{\pi R}{R + a(n-1)}\right) \end{cases}$$

以上の考察の結果，グラフにスタートの位置を点線で付け加えました。そしてもうちょっと式が簡単にならないかと工夫の結果，$n - 1 = N$，そして $a = 1$ とすると

$$\begin{cases} x = -(R + N)\cos\left(\dfrac{\pi R}{R + N}\right) \\ y = (R + N)\sin\left(\dfrac{\pi R}{R + N}\right) \end{cases}$$

4.12.4 コース図その 3



もう 1 つ余談で，図を見てわかる通り後半の進む π は最初の頃よりそんなに前に行かない。これは基準線 (1 コースがスタートする位置) からの距離だからである。実際に体育部がグランドで 3 コース目のスタート位置を作成するときには，2 コース目のスタート位置から π 測ると思う。でも本当はもう一度基準線に戻って 2π を測らなければいけないのである。だからコーナーがスタートの体育大会のセパレートコースはアウトコースが有利だと思う。

4.12.5 極方程式

同僚と話をしていたら極座標を用いた極方程式の方が簡単に表せるんじゃないかと気づきました。極座標とは原点からの距離 r と角度 θ で表す座標の事です。このことよりラジアン単位の θ で表した扇形の弧の長さ ℓ は $\ell = r\theta$ より

$$r(\pi - \theta) = \pi R$$
$$r = \frac{\pi R}{\pi - \theta} \ (0 \leqq \theta < \pi)$$

美しい…，久しぶりに感動しました。ヒントをくれた村松$_{\mathrm{T}}$ ありがとう。