8　高校数学外伝

今ではなくなってしまった数学セミナーの「高校数学外伝」を作ってみました。コーヒーブレイク時にお読みください。ちなみに場面設定は 静岡県立 O 高等学校 の数 III を担当している教師 T と科目選択している女子生徒 S_1 と男子生徒 S_2 と S_3 の場面です。

8.1　高校数学外伝 I「体積微分は表面積」

T「今日は，中学の時に習った球の体積を積分使って求めてみようと思ってる。」

S_2「球の体積は，え〜と『身(3)の上心(4)配(π)ある(r)さ(3)』だったっけ？ $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ のこと？」

T「そうだよ，半径を r として，前の時間に習った回転体の体積 $V=\pi\displaystyle\int_a^b y^2dx$ で求めてみようよ。半径 r の円の方程式は？」

S_1「バカにしないでよ，先生。$x^2+y^2=r^2$ でしょ。」

T「ゴメン，ゴメン。その通り，やってごらん。」

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-r}^{r}y^2dx\\&=\pi\cdot 2\int_0^r(r^2-x^2)dx\\&=2\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r\\&=\frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

S_2「へ〜，こんなに簡単に求めることができるんだ。」

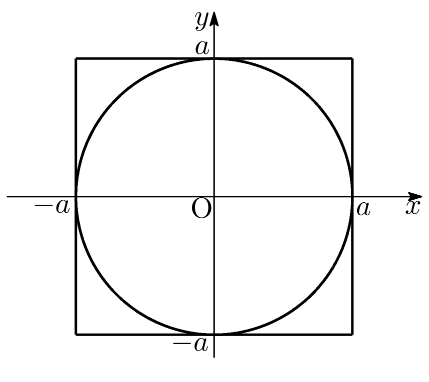
T「そうだよ。話は変わるけど，球の体積を r で微分すると表面積の公式になることは知ってるかい？」

S_2「そうなの？ 球の表面積は $S=4\pi r^2$ だったっけ？ なってる！」

T「どんな立体でも V' はその表面積を求める式になるんだよ。円の面積 $S=\pi r^2$ を r で微分すると $2\pi r$ で円周の長さの公式が出現するのも偶然じゃないんだ。」

S_2「へぇ〜，そうなんだ。でもさ先生，立方体の体積公式は $V=a^3$ でしょ。$V'=3a^2$ で，表面積 S は面積 a^2 の正方形 6 枚で $6a^2$，等しくならないじゃん。」

T「どんな立体でもというのは少し大げさかな，その立体を作っている辺の長さを Δa だけ長くしたとき，立体全体が Δa だけ大きくなっていなければいけないんだ。例えば正方形でいうと，対角線の交点を原点にとって考えないとだめなんだ。原点からの長さを a としたとき 1 辺は $2a$ になって，$S=4a^2$，周の長さは $\ell=8a$ で $\ell=S'$ になってるだろう。」



S_2「本当だ！」

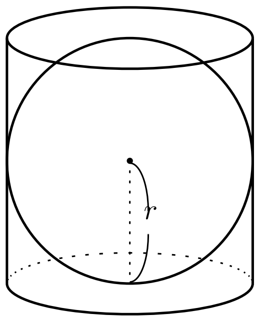
T「だから立方体の場合には，対角線の交点を基準に辺の長さを考えなければいけないんだ。」

S_2 「対角線の交点から立方体を考えると，一辺は $2a$ になるな。体積 V は $8a^3$ で，表面積 S は $(2a)^2\times 6=24a^2$ だから，本当だ a で微分すると表面積公式が出る！」

T 「その立体に球が内接していると思えばいいんじゃないか，立方体の内部に内接する球だったらすぐに思い浮かぶだろう？ じゃあさ，底面の半径が r で高さが $2r$ の円柱の表面積と体積公式を計算してごらん。球を取り囲むような円柱だよ。」

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \times 2r \\ &= 2\pi r^3 \\ \frac{dV}{dr} &= 6\pi r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times 2r \\ &= 6\pi r^2 \end{aligned}$$



S_2 「できたよ！ この性質すごいじゃん！ 先生！」

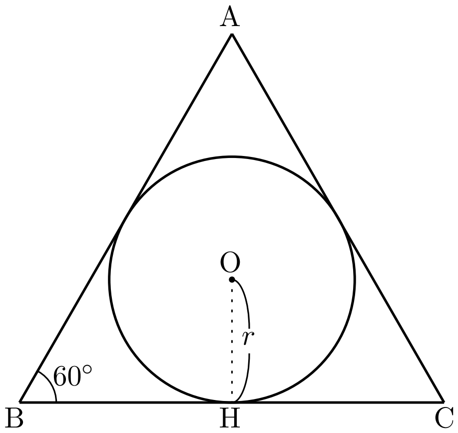
T 「なんか，ようやく微分と積分の関係が分かってきたようだな。じゃ今の応用で半径 r の球に内接する円錐の体積と表面積を求めてごらん。母線と底辺との角度は 60° としよう。」

S_2 「よ〜し，挑戦！ 挑戦！」

$\mathrm{BH}=\sqrt{3}\,r$，$\mathrm{AH}=3r$ より

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}\,r)^2 \times 3r \\ &= 3\pi r^3 \\ \frac{dV}{dr} &= 9\pi r^2 \end{aligned}$$

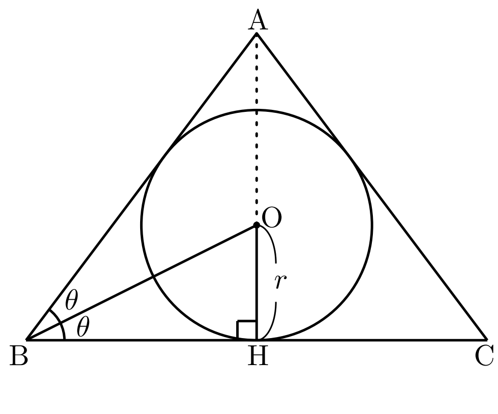
$$\begin{aligned} S &= \pi(\sqrt{3}\,r)^2 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\pi r \times 2\sqrt{3}\,r \\ &= 9\pi r^2 \end{aligned}$$



T 「できたじゃないか〜。実は球が内接する円錐は，今 60° にした角度によって体積が決まるんだ。この角度を θ，内接する球の半径を r とし，円錐の体積の最小値を今日の宿題にするから，これも挑戦してごらん。」

S_2 「ええ〜っ！ そんなのあり〜。」

S_1 「もう〜，受験勉強しなくちゃいけないのに〜。$\angle\mathrm{ABH}$ を θ として円錐の体積が最小になる θ？ う〜ん。まてよ $\angle\mathrm{OBH}$ を θ とすると $\angle\mathrm{ABH}$ は 2θ になるな，これでも問題の意味は同じことだ。最後は 2θ の値を考えればいいんだから。あとは $\angle\mathrm{ABH}=60^\circ$ で使った長さを θ で表せばいいのか…，よーしやってやりましょう！」



$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ で $\tan\theta=\dfrac{r}{\mathrm{BH}}$ より

$$\mathrm{BH}=\frac{r}{\tan\theta}$$

$\tan 2\theta=\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ より

$$\mathrm{AH}=\frac{\tan 2\theta}{\tan\theta}r=\frac{2}{1-\tan^2\theta}r$$

$V=\dfrac{1}{3}\times\pi\mathrm{BH}^2\times\mathrm{AH}$ より

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{r^2}{\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{1-\tan^2\theta}r=\frac{1}{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

$\mathrm{S_1}$「ようやく体積を求めることができた。え〜っと，後は r を定数とみなして，θ の関数として考えればいいんだ。これを θ で微分するの〜？」

$$V=\frac{1}{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

ここで $\tan\theta=t$，$\dfrac{2}{3}\pi r^3=C$ とすると

$$V=\frac{C}{t^2-t^4}$$

$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と $\dfrac{dV}{dt}=-\dfrac{C}{(t^2-t^4)^2}\cdot(2t-4t^3)$ より

$$V'=\frac{dV}{dt}\cdot\frac{dt}{d\theta}=-\frac{C}{(\tan^2\theta-\tan^4\theta)^2}\cdot(2\tan\theta-4\tan^3\theta)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$V'=\frac{2(2\tan^2\theta-1)(1+\tan^2\theta)}{\tan^3\theta(1-\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3$$

$\mathrm{S_1}$「ここで $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より $0<\tan\theta<1$ から $(2\tan^2\theta-1)$ 以外の項はすべて正だから，$2\tan^2\theta-1=0$ だけ考えればいいんだ。$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を境に V' の符号が負から正へ変わるのでこのとき V は最小値 $\dfrac{8}{3}\pi r^3$ になる。やった〜できた〜。眠れる〜。」

$\mathrm{S_1}$「先生，できました。最小の体積は $\dfrac{8}{3}\pi r^3$ でしょ。」

T 「すごいじゃないか〜。角度は求めたかい？」

$\mathrm{S_1}$「普通の電卓しかもってないからわかりませんでした。$\angle\mathrm{OBH}$ を θ として $\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときでしょ。」

T 「正解！ その値は約 39° なんだ。だから 2θ で約 78° なんだよ。」

$\mathrm{S_1}$「先生，宿題をあんまり出すと受験勉強ができません。昨日は一晩かかったんですよ。」

T 「ゴメン，ゴメン。ただね，君ならできると思ったから。」

$\mathrm{S_1}$「まぁね。」