8.2　高校数学外伝 II「陸上トラックのスタート位置の極限はゴール？」

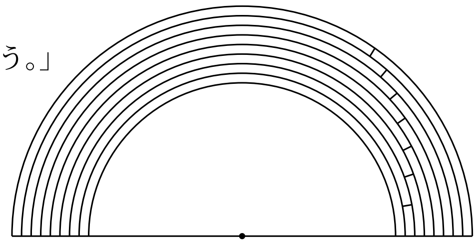
T「体育大会が近づいてきたけど練習してるか？」

S_2「任せといて！ 俺リレーのアンカー！」

T「今日は陸上のトラックで極限を考えたいと思う。」

S_2「トラックで？ 何の極限？」

T「簡単な図を用意したんだ。外側のコースはどうして内側のコースの人より前でスタートするんだ？」



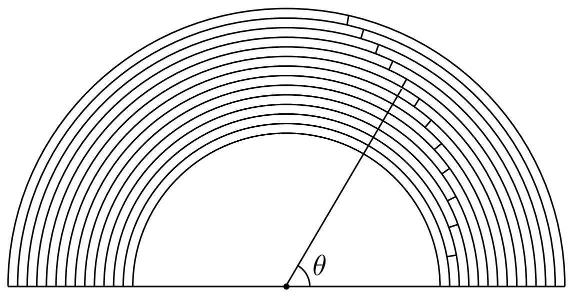
S_2「当たり前じゃん，その分遠くなるからだろ。」

S_1「走る距離が長くなるからその分前でスタートするんでしょ。」

T「その通り，カーブの半径を R　，コース幅 1　のトラックを半周回るとして長さを求めてみようか。」

S_1「もう〜，中学校の問題じゃん！ 半周でいいんだから，$\pi(R+1)-\pi R=\pi$，できたよ。」

T「カーブを作る半径に関係なく π　前でスタートするということだね。π　というと約 3　だな，11 コースで約 30　だな。ちょっと前に出すぎじゃないか？ このスタート位置はどこまで前に行くの？ スタート位置の極限はどうなってると思う？」



S_2「そりゃ，いつかはゴール越すかもしれないけど，そんな大きな陸上トラックどこにあるんですか？」

S_1「ゴールは越さないでしょ。」

T「じゃ，カーブの半径 20　，コース幅 1　で θ が 30° のときは何コースか計算してみようか。」

S_2「n コースは $(n-1)\pi$ 前でスタートするから…」

$$\theta=\frac{(n-1)\pi}{\pi\{20+(n-1)\}}\times 180^\circ \text{ だから}$$

$$\frac{n-1}{19+n}\times 180^\circ=30^\circ$$

$$6(n-1)=19+n$$

$$n=5$$

T「走る距離が πR だから $\theta=180^\circ-\dfrac{\pi R}{\pi(R+n-1)}\times 180^\circ=\dfrac{n-1}{R+n-1}\times 180^\circ$ でも θ は同じ式になるね。5 コースで 30° か，ゴールまで後 150° だ。この調子ならすぐにゴールまでたどり着けるんじゃないか？ 30° 刻みで何コースか求めてみよう。」

S_2「60° は 11 コースで，90° は 21 コースです。」

S_3「120° は 41 コースで，150° は 101 コースです。」

T「今までに出てきた情報をまとめてみようか。」

θ	0	30	60	90	120	150
コース	1	5	11	21	41	101

4 コース　7 コース　10 コース　20 コース　60 コース

T 「この表を見てみんなどう思う？」

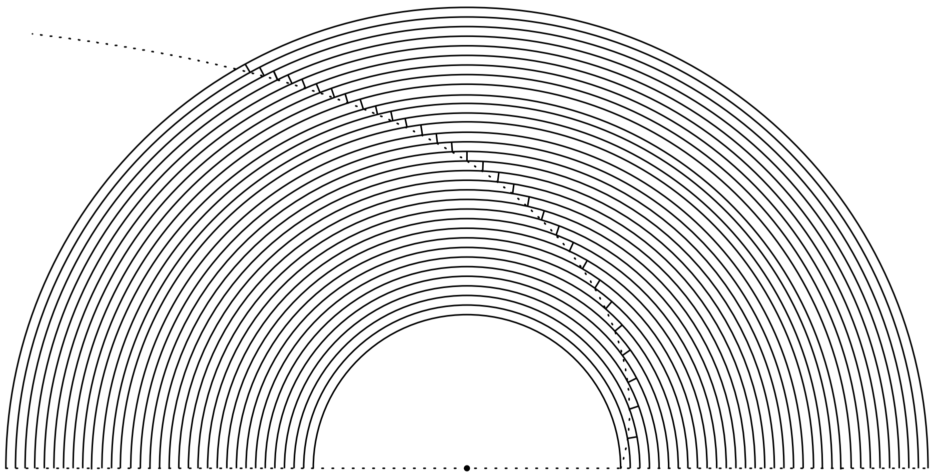
S_3 「180° をやってみたんだけど，n が消えて求められなくなった。」

S_2 「変化の様子を調べていくと，最初の 30° は 4 コース分，次の 30° は 7 コース分，その次の 30° は 10 コース分，20 コース分，最後の 30° は 60 コース分か…。」

T 「計算だと 180° のときは求められないっていったけど，このスタート位置の極限はどうなっていると思う？」

S_3 「想像できないなぁ〜，だってずっと π 　前に進むんでしょ。なんで計算できないんだろう？」

S_1 「最後は距離 πR 　の直線になる？」



T 「そうなんだ，図を用意した。いつまでたっても θ は大きくなっていくけど，どんどん外側のコースのスタートは離れていくばかりでゴールを超えることはないんだよ。この場合の極限はほとんど直線でできたコースを走ることになるんだ。今やった計算だけどさ，せっかく数 III を学習しているんだから角度はラジアンで考えようよ。ラジアンで考えると扇形の弧の長さ ℓ は $\ell = r\theta$ で表せる特徴がある。今考えている θ をコーナーの半径を R，中心からの距離を r として立式できるかい？」

S_1 「$r(\pi - \theta) = \pi R$ ということですか？」

T 「そうだよ。r と θ の極方程式だったね。それを θ について解けばいいんだ。」

S_2 「$\theta = \dfrac{\pi(r-R)}{r}$ か。」

T 「グラフソフトを使って表すときには r について解いて $r = \dfrac{\pi R}{\pi - \theta}$ と変形すればいいんだ。この式の θ の変域は $0 \leqq \theta < \pi$ ということはわかるね。」

S_3 「そうなんだぁ。」

T 「ところで，最初の頃の π 　はどんどん前に進んでいくけど，後半は同じ π 　なのになぜ少ししか前に進まないのだろう？」

S_3 「本当だ！ 同じ π 　なのに最初の方が長いよ！」

T 「これは 1 コースのスタート位置の延長線上から測るからなんだ。外側に行けば行くほどカーブのふくらみが大きくなるから，結果的に少ししか前に進まないんだ。極限の様子が理解できれば式の意味も変域も理解できると思うから，いつでもイメージを感じながら極限を考えていって欲しい。」