8.3　高校数学外伝 III「双曲線」

数 III の授業開始前，S_2 は黒板に向かって今日の演習問題を解こうとしている。

S_2「今日の問題教えてくれよ。」

S_1「どの問題があたっているの？」

S_2「$x^2-y^2=1$ の $\dfrac{dy}{dx}$ を求める問題なんだ。」

S_1「簡単じゃん。」

S_2「そう言わないで，前の授業中ウトウトしちゃってさ，記憶にないんだ。」

S_1「しょうがないわね。$2x-2y\dfrac{dy}{dx}=0$ を $\dfrac{dy}{dx}$ で解けばいいの。」

S_2「な〜る。ありがと！」

T「今日の演習問題は全員できたじゃないか。」

S_2「先生，俺がやった問題 $x^2-y^2=1$ は双曲線ですよね。」

T「そうだな，$a=b=1$ の双曲線だから直角双曲線だな。それがどうした？」

S_2「双曲線って中学で学習した反比例ですよね？」

T「その通り。」

S_2「でも中学では $y=\dfrac{a}{x}$ という式で学習したけど，$x^2-y^2=1$ をどうやったら $y=\dfrac{a}{x}$ の形になるんですか？『2 次曲線』で学習してからずっと疑問に思ってたんですけど。」

S_3「そうそう，俺も思ってた。」

T「漸近線が座標軸とずれていると式の形が変わってしまうんだ。この問題の漸近線は座標軸と 45° の角度だから，そうだな，ちょっとやってみるか。みんな，グラフを回転させる方法を覚えているかい？」

S_2「回転？ そんなの学習したっけか？」

T「『複素数平面』でやった原点を中心とする回転と数 II でやった軌跡を組み合わせるとできるんだよ。知らないということは数 III の実力問題まだやってないな！」

S_2「原点を中心とする回転？」

T「しょうがないなぁ〜。ド・モアブルの定理だよ。複素数 z に $\cos\theta+i\sin\theta$ をかけると θ だけ回転した新しい複素数 z' になるんだった。今は 45° 回転させたいから…」

$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$z=x+yi, z'=x'+y'i$ として

$$x'+y'i=(x+yi)\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{(x-y)+(x+y)i}{\sqrt{2}}$$

$$x'=\frac{x-y}{\sqrt{2}}\ ,\ y'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

T「この式を x,y について解いて，元の式 $x^2-y^2=1$ に代入すれば回転後のグラフの方程式を求めることができる。がんばれ〜」

S_3「あちゃ〜，お前が余計なこと言うから…。」

S_2「まぁ，授業が進まないことを考えればいいじゃないか，計算してみようぜ。お前だって疑問に思ってたじゃないか。」

S_2「ええっと，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'),\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$ になったからこれを $x^2-y^2=1$ に代入すればいいんだ。」

T 「そうだよ。後少し。」

$\mathrm{S_2}$ 「これを $x^2-y^2=1$ に代入すると…」

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')\right\}^2-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')\right\}^2&=1\\4x'y'&=2\\y'&=\frac{1}{2x'}\\y'&=\frac{A}{x'}\end{aligned}$$

$\mathrm{S_2}$ 「おぉ〜。先生 $y=\dfrac{a}{x}$ の形になりました〜。」

T 「グラフの回転はちょっと前までは『行列』という便利な技があったんだけど，今では教科書からなくなってしまったんだ。そうそう，中学では比例 $y=ax$ が積の関係でグラフは直線，反比例 $y=\dfrac{a}{x}$ が商の関係でグラフは双曲線って学習したと思う。だけど，高校では双曲線を”2 定点からの距離の差が一定”という条件で定義したんだけど，実は反比例のときの漸近線，座標軸までの距離の積が等しい点の軌跡という $xy=a$ という定義もできるんだ。じゃ，やりついでに x 軸と θ の角度の $y=\tan\theta\cdot x$ と $y=-\tan\theta\cdot x$ を漸近線として点 $\mathrm{P}(x_1,\,y_1)$ からこの 2 つの直線への距離の積が一定の 1 になる式を求めてごらん。点と直線との距離の公式は覚えているよね。」

$\mathrm{S_2}$ 「$\mathrm{PH}=\dfrac{|\,ax_1+by_1+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ だったっけか？」

T 「そうだ！ $y=\tan\theta\cdot x$ ということは $a=\tan\theta,\ b=-1,\ c=0$ のときだぞ。」

$\mathrm{S_2}$ 「$\mathrm{PH}=\dfrac{|\tan\theta\cdot x_1-y_1|}{\sqrt{\tan^2\theta+(-1)^2}}=|\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1|$」

T 「お，いい感じ。」

$\mathrm{S_2}$ 「うるさいな〜先生，黙ってて！ もう 1 つの直線 $y=-\tan\theta\cdot x$ との距離 PI は…」

$\mathrm{PI}=|\sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot y_1|$

$\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PI}=1$ より

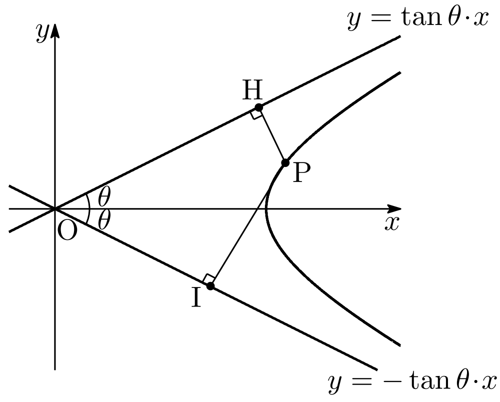
$$\begin{aligned}|\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1|\cdot|\sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot y_1|&=1\\\sin^2\theta\cdot x_1^2-\cos^2\theta\cdot y_1^2&=\pm1\end{aligned}$$

$x=x_1,\,y=y_1$ として

$$\sin^2\theta\cdot x^2-\cos^2\theta\cdot y^2=\pm1$$

これを標準形に変形すると

$$\frac{x^2}{\dfrac{1}{\sin^2\theta}}-\frac{y^2}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}=\pm1$$



$\mathrm{S_2}$ 「できたよ！」

T 「すばらしい，パチパチ……，右辺の -1 は y 軸と交わる双曲線だよ。そうそう 45° の回転に使った $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ という数は簡単に表すと $\sqrt{i}$ という数なんだ。授業では余り扱わなかったけど，$\times\,i$ が 90°，$\times\sqrt{i}$ が 45° の左回転をする計算になるんだ。$\times(-\sqrt{i})$ は右 45° の回転になる。いったん複素数に直してから計算して元に戻せば，座標平面のグラフを回転することができるんだよ。」