8.6 高校数学外伝 VI「$\sqrt{i}$」

T「今日は, 虚数 i と平方根の関係を考えたいと思う。まずは小手調べに方程式 $x^4+1=0$ を解いてみようか。」

S_1「今日は意外と簡単そうな問題なんですね。」

T「ごたくはいいから，早くやる！」

S_2「$x^4=-1$，うん？ そうか $t=x^2$ とすれば 2 次方程式 $t^2=-1$ だから，$t=\pm i$，t を x に戻すと…，$x^2=\pm i$，うむっ？ $x=\pm\sqrt{\pm i}$ ？」

T「さぁ，今日考える式が出てきたかい？」

S_2「先生，この $\sqrt{i}$ ってなんなんですか？」

T「平方完成の形でこの式を解くとその解が出現するんだ。因数分解の解き方で $x^4+1=0$ を解いてみようよ。」

S_2「因数分解って，この式が因数分解できるんですか？」

T「そのままじゃ無理だけど，ある技を使うと因数分解できるんだ。」

S_2「先生，その技を教えてくださいよ。」

T「ただじゃもったいないなぁ〜。教科書にも書いてない技なんだ。」

S_2「ええっ〜。」

T「ウソ，ウソ，$2x^2$ とそのキャンセル項 $-2x^2$ を加えると因数分解できるんだ。やってごらん。」

$$\begin{aligned}
x^4+1+2x^2-2x^2&=0\\
(x^2+1)^2-2x^2&=0\\
(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\cdot x)^2&=0\\
(x^2+1-\sqrt{2}\cdot x)(x^2+1+\sqrt{2}\cdot x)&=0\\
(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1)(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1)&=0
\end{aligned}$$

T「おっ，いい感じ。」

S_2「あとは，2 つの 2 次方程式を解けばいいんだから…。」

$$\begin{aligned}
&x^2-\sqrt{2}\cdot x+1=0 && x^2+\sqrt{2}\cdot x+1=0\\
&x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} && x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}\\
&x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2} && x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}\\
&x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2} && x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}
\end{aligned}$$

S_2「これで，できたのかなぁ〜？」

T「出てきた式は，分母分子に $\sqrt{2}$ をかけると簡単になるよ。」

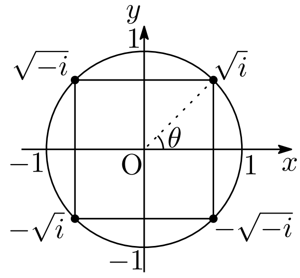
$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\pm2i}{2\sqrt{2}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

S_1「$x=\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$，もう 1 つは $x=\dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$ になりました。」

T「出てきた 4 つの解を最初に出てきた $\pm\sqrt{i}$ と $\pm\sqrt{-i}$ に対応させるんだ。基本どれを基準に対応させてもいいんだけどわかりやすいように

$$\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad -\sqrt{i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{-i}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad -\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

になっている。じゃ今日出てきた 4 つの複素数を複素数平面上で表してみようか。」



S$_2$　「できました。4 つの解は正方形の頂点になるんですね。」

T　「どの点も偏角 θ を 4 回増やすと -1 にたどり着くことを確認してごらん。」

S$_2$　「$\sqrt{i}$ の偏角は $\dfrac{\pi}{4}$ だから，4 倍すると π だから…，おおっ -1 になります！」

S$_1$　「$\sqrt{-i}$ は 2 周目で -1 になったわ。」

S$_2$　「$-\sqrt{i}$ の偏角は $\dfrac{5\pi}{4}$ だから，4 倍すると 5π だから…，2 周と半週で -1 ！」

T「ある数に虚数 i をかけると 90° の回転を表すことは学習したよね。この $\sqrt{i}$ は 45° の回転を表しているんだ。$(1+i)\times\sqrt{i}$ を計算してごらん。」

S$_2$「$(1+i)\times\sqrt{i}=\sqrt{i}+i\sqrt{i}$ これってどうやって計算するの？」

T「$\sqrt{i}$ の値は今求めたばかりじゃないか，$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ を使うんだよ。」

$$(1+i)\times\sqrt{i}=(1+i)\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}}=\frac{2i}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,i$$

S$_2$「$\sqrt{2}\,i$ になりました。」

T「複素数 $1+i$ と $\sqrt{2}\,i$ を複素数平面上で表してごらん。比べると 45° の左回転の関係になっている事が一目瞭然だろ。」

S$_2$「おおぉ〜，確かに！」

T「複素数平面上で表されている何かを左に 45° 回転させたいときには $\times\sqrt{i}$ の計算をすればいいんだ。右に 45° 回転させたいときには $\times(-\sqrt{i})$ の計算だ。最初の因数分解も基本公式は $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$ なんだ。これは実力問題で入試に出ることもあるから覚えておくように。」