6.3　元気話．円周率 π

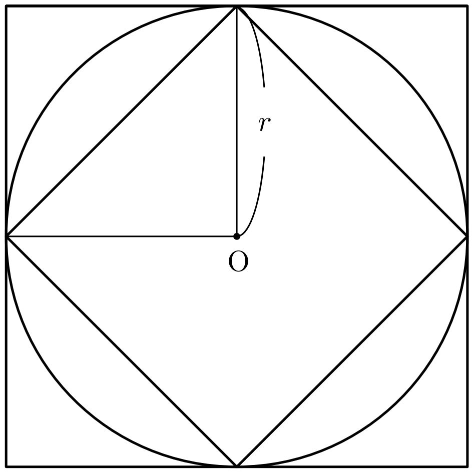
昔，東大の入試問題 (2003 年理系) に以下のような問題が出題されました。

問．円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

この問題の正解を出すためには高校で学習する三角比の余弦定理が必要ですので，そのままでは中学生には解くことはできません。ここで思ったことがあります。

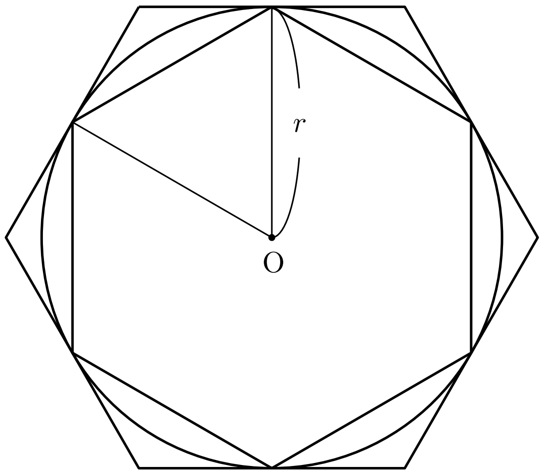
「中学生は円周率を計算でどこまで求めることができるのだろう？」

そこでやってみました。



まずは内接する正方形と外接する正方形から円周率の範囲を求めてみましょう。使う定理は三平方の定理だけです。半径 r，円周を ℓ とすると

$$\sqrt{2}\,r \times 4 < \ell < 2r \times 4$$
$$\frac{4\sqrt{2}\,r}{2r} < \frac{\ell}{2r} < \frac{8r}{2r}$$
$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$
$$2.828\cdots < \pi < 4$$



次に内接する正六角形と外接する正六角形から

$$r \times 6 < \ell < \frac{1}{\sqrt{3}} r \times 2 \times 6$$
$$\frac{6r}{2r} < \frac{\ell}{2r} < \frac{4\sqrt{3}\,r}{2r}$$
$$3 < \pi < 2\sqrt{3}$$
$$3 < \pi < 3.464\cdots$$

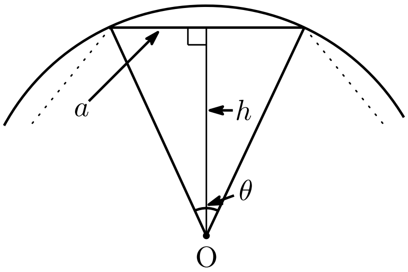
以上のような結果になりました。これ以上の正多角形の面積は中学生は求めることができません。小数点以下 1 桁の精度をあげるのに大変な努力，学習が必要ですね。

一応書いておくと，正八角形で上記の計算を行うと $4\sqrt{2-\sqrt{2}} < \pi < 4(2\sqrt{2}-2)$ となり, $3.0614\cdots < \pi < 3.3137\cdots$ となります。正 12 角形だと $6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi < 12(2-\sqrt{3})$ となり, $3.1058\cdots < \pi < 3.2153\cdots$ となります。

最後に数学の日は 3 月 14 日でしたね。ホワイトデーにほとんど占領されていますが，いい設定だと思っています。

6.3.1 正多角形の 1 辺の長さ

2022 年 2 月号の数学セミナーに刺激を受けて正多角形の辺の長さを考察してみました。



半径 r の円に内接する正 n 角形の面積 S は

$$S=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

で求められることを学びました。

正 n 角形	中心角 $\theta=\frac{360^\circ}{n}$	$\cos\theta$	a(底辺)	h(高さ)	$\frac{S}{r^2}$
3	120°	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}r$	$\frac{1}{2}r$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}=1.299\cdots$
4	90°	0	$\sqrt{2}r$	$\frac{1}{\sqrt{2}}r$	2
5	72°	$\frac{1}{2\varphi}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}r$	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}r$	$\frac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}=2.377\cdots$
6	60°	$\frac{1}{2}$	r	$\frac{\sqrt{3}}{2}r$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}=2.598\cdots$
8	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}r$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}r$	$2\sqrt{2}=2.828\cdots$
10	36°	$\frac{1}{2}\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}r$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}r$	$\frac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2.938\cdots$
12	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}r$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}r$	3
20	18°	$\frac{\sqrt{\varphi+2}}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{\varphi+2}}r$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{\varphi+2}}}{2}r$	$5\sqrt{2-\varphi}=3.090\cdots$
24	15°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}r$	$\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}r$	$3\sqrt{6}-3\sqrt{2}=3.105\cdots$

備考
- 底辺 a は余弦定理より $a=\sqrt{r^2+r^2-2r\cdot r\cdot\cos\theta}=\sqrt{2(1-\cos\theta)}\cdot r$
- 高さ h は三平方の定理より $h=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$
- 三角比の性質上 θ が 15 または 18 の倍数にならないと $\cos\theta$ の値の表現が困難になるため n が制約される。(正 9 角形や正 15 角形等の考察がないのはそのためである。)
- φ は黄金比の値，2 次方程式 $\varphi^2-\varphi-1=0$ を満たす正の解で $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。
- 参考　内接正 24 角形の周の長さ ℓ で円周率 π を近似すると
  $\pi=\frac{\ell}{2r}=\frac{an}{2r}$ より $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}\times 24=3.132\cdots\cdots$ になる。
- 参考　外接正多角形の 1 辺の長さ a' は相似の関係より $a'=\frac{ar}{h}$ から求めることができる。

(2022 年 2 月 14 日追記，4 月 14 日修正)