7.5　レオンハルト・オイラー　～史上初めて素数を数式上で表した人物～

18 世紀の数学者レオンハルト・オイラー (1707 年 4 月 15 日-1783 年 9 月 18 日) が残した功績は数多くあります。有名な $e^{i\pi} = -1$ もオイラーです。ここでは人類史上初めて素数を数式上に表した人物ということに着目したいと思います。

オイラーは素因数分解の一意性から自然数の和が素数の累乗和で表せることに気づきました。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k &= (1+2+2^2+2^3+\cdots)\cdot(1+3+3^2+3^3+\cdots)\cdot(1+5+5^2+5^3+\cdots)\cdot\cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 5^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 7^k \cdot \cdots \\ &= \prod_{p:prime}^{\infty} \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\Bigr)\end{aligned}$$

最初の 1 行目が大切なので，この式がなぜ自然数の和になるのか解説します。最初の式は ( )( ) の積ですので分配法則を使ってはずします。そのとき

$$\begin{array}{rcccccc} 1= & 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 2= & 2 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 3= & 1 & \cdot\ 3 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 4= & 2^2 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 5= & 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 5 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 6= & 2 & \cdot\ 3 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ 7= & 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 1 & \cdot\ 7 & \cdot\ 1 & \cdot\cdots \\ \cdots= & \cdots & \cdot\cdots & \cdot\cdots & \cdot\cdots & \cdot\cdots & \cdot\cdots \end{array}$$

となり，自然数が順番に出現します。これが同じ素因数分解形の数はないという素因数分解の一意性です。素数が数を作っているという数における素数の重要さ，または**自然数の和が素数の累乗和を用いた積に等しい**ことが理解できればいいと思います。

さてここで等比数列を復習しましょう。初項 a，公比 r の一般項 a_n は $a_n = ar^{n-1}$ で表され，その和 S_n は $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ でした。等比数列の和 S_n は $n \to \infty$ のとき $|r| < 1$ ならば収束しますが $|r| \geqq 1$ のときは発散してしまいます。よって当然ながら上記の素数の累乗和の積で表される自然数の和は ∞ に発散します。発散するのなら逆数の和を求めればいいじゃないかということで，現在では調和級数とよばれている自然数の逆数の和を考えました。

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

この式の分母には前述の自然数の和と同様に 1 から順に数が出現します。この式に素数の累乗和をあてはめると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \Bigl(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\Bigr)\cdot\Bigl(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\Bigr)\cdot\Bigl(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\Bigr)\cdot\cdots \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\Bigl(1-\bigl(\frac{1}{2}\bigr)^n\Bigr)}{1-\frac{1}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\Bigl(1-\bigl(\frac{1}{3}\bigr)^n\Bigr)}{1-\frac{1}{3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\Bigl(1-\bigl(\frac{1}{5}\bigr)^n\Bigr)}{1-\frac{1}{5}} \cdot \cdots \\ &= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{p}{p-1}\cdot\cdots\end{aligned}$$

$n \to \infty$ において ( ) の中の数列は収束するのですが，それらの積で表されたこの調和級数は ∞ に発散します。しかし大切なことは，調和級数の和が発散するという結果ではなく，自然数の逆数の和が素数を用いた数式で表せるということが重要なのです。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{7}} \cdot \cdots \\ &= \frac{1}{1-2^{-1}} \cdot \frac{1}{1-3^{-1}} \cdot \frac{1}{1-5^{-1}} \cdot \frac{1}{1-7^{-1}} \cdot \cdots \\ &= \prod_{p:prime}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-1}} = \prod_{p:prime}^{\infty} \frac{p}{p-1}\end{aligned}$$

この式がのちにリーマンによって名付けられるゼータ関数の原型です。

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p:prime}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-1}}$$

ゼータ関数とはこの式の中に出現する 1 を複素数 s に置き換えたものです。

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:prime}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

オイラーは当時の問題の一つ，「平方数の逆数の和はどうなるか。」という問題 ($\zeta(2)$: バーゼル問題) を解きました。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \right)$$

この式に対しても素因数分解の一意性から気がついた式をあてはめ

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \cdots\right) \cdot \cdots \\ &= \frac{1}{1-2^{-2}} \cdot \frac{1}{1-3^{-2}} \cdot \frac{1}{1-5^{-2}} \cdot \frac{1}{1-7^{-2}} \cdot \cdots \quad \cdots\cdots ① \\ &= \prod_{p:prime}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-2}}\end{aligned}$$

そしてこの式が $\dfrac{\pi^2}{6}$ に収束することを証明したのです。(証明は略)

①の式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

で表されます。見事に素数が数式の中で必要不可欠の存在として表現されています。中学生で学ぶ素数と素因数分解が数の世界において重要なことが理解できると思います。

(参考文献：数学のたのしみ 創刊号 ζ の世界 1997 年 (株) 日本評論社発行)