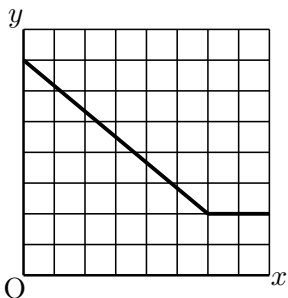
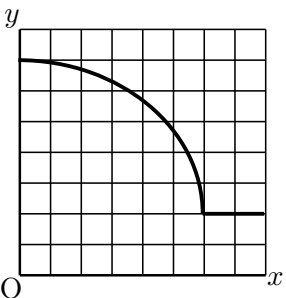
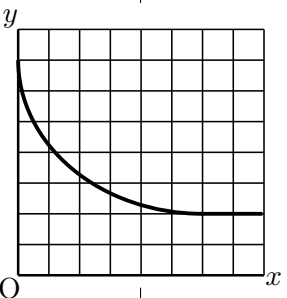


5.3 積分法とその応用

5.3.1 お湯の温度

たまには実験の授業なんかはどうですか？ 数学の実験って聞いた生徒は喜ぶと思うけどなぁ～、準備が少しだけ大変だけどね。教材はニュートンの冷却の法則で微分方程式の利用です。

5.3.1.1 お湯の温度実験

学 習 活 動	備 考																																														
<p>・ピーカーにお湯を入れるとお湯の温度はどうなりますか？</p> <p>・今日はピーカーに入れたお湯の温度がどのように下がっていくのか、その温度を測る実験をします。</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>問．最初のお湯の温度が80℃だとして、どのように温度は下がっていくのか予想してみよう。</p> </div> <p>・予想される生徒の考え</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;">    </div>	<p>・準備するもの・温度計・ストップウォッチ・お湯・ピーカー</p>																																														
<div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>問．各班ごと道具を用意して実験を開始してください。</p> </div> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td style="text-align: center;">時間 (分)</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">6</td> <td style="text-align: center;">7</td> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">10</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">温度 (℃)</td> <td style="text-align: center;">80.0</td> <td style="text-align: center;">78.8</td> <td style="text-align: center;">76.0</td> <td style="text-align: center;">73.2</td> <td style="text-align: center;">71.0</td> <td style="text-align: center;">68.9</td> <td style="text-align: center;">66.9</td> <td style="text-align: center;">65.2</td> <td style="text-align: center;">63.4</td> <td style="text-align: center;">62.0</td> <td style="text-align: center;">60.5</td> </tr> </table> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 10px 0;"> <tr> <td style="text-align: center;">時間 (分)</td> <td style="text-align: center;">11</td> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">13</td> <td style="text-align: center;">14</td> <td style="text-align: center;">15</td> <td style="text-align: center;">16</td> <td style="text-align: center;">17</td> <td style="text-align: center;">18</td> <td style="text-align: center;">19</td> <td style="text-align: center;">20</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">温度 (℃)</td> <td style="text-align: center;">59.0</td> <td style="text-align: center;">57.9</td> <td style="text-align: center;">56.5</td> <td style="text-align: center;">55.3</td> <td style="text-align: center;">54.2</td> <td style="text-align: center;">53.1</td> <td style="text-align: center;">52.2</td> <td style="text-align: center;">51.2</td> <td style="text-align: center;">50.3</td> <td style="text-align: center;">49.5</td> </tr> </table>	時間 (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	温度 (℃)	80.0	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5	時間 (分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	温度 (℃)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5	<p>・実験レポート用紙を配布する。</p>
時間 (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																				
温度 (℃)	80.0	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5																																				
時間 (分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																					
温度 (℃)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5																																					
<p>・実験が終わった班は片づけをして、レポートをまとめましょう。</p>	<p>・余裕を持って終われるように時間を確保する。</p>																																														

5.3.1.2 お湯の温度実験解説

ニュートンの冷却の法則によれば、時刻 t におけるお湯の温度が室温より x ℃高いとすると、お湯の温度の下がる速さは、室温との温度差 x に比例し、次の関係が成り立つ。

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$\frac{1}{x} dx = -k dt$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -k dt$$

$$\log x = -kt + C$$

$$x = e^{-kt+C}$$

$$x = Ae^{-kt}$$

例えば，授業の準備のために行った予備実験のデータで説明しよう。

時間 (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
実験値 (°C)	81.4	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5

時間 (分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
実験値 (°C)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5

この場合，はじめの温度は 81.4°C で，室温 24°C より 57.4°C 高かったから， $t = 0$ のとき $x = 57.4$ の条件で解くと

$$x = 57.4e^{-kt} \dots (1)$$

20 分後のお湯の温度が 49.5°C でそのときの室温 24°C との差は 25.5°C だから，

$$25.5 = 57.4e^{-20k}$$

したがって，

$$e^{-k} = \left(\frac{25.5}{57.4} \right)^{\frac{1}{20}} \approx 0.9602 \dots$$

これを (1) に代入すると

$$x \approx 57.4 \times 0.9602^t$$

となる。よってお湯の温度を y °C，時刻を t としたときのこの場合の関係式は

$$y = 57.4 \times 0.9602^t + 24$$

となる。これが初期値と終値から求めることができる関係式である。

理論値と実験結果を比べて書いてみよう。

時間 (分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
実験値 (°C)	81.4	78.8	76.0	73.2	71.0	68.9	66.9	65.2	63.4	62.0	60.5
理論値 (°C)	81.4	79.1	76.9	74.8	72.8	70.9	69.0	67.2	65.5	63.8	62.2
誤差		0.3	0.9	1.6	1.8	2.0	2.1	2.0	2.1	1.8	1.7

時間 (分)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
実験値 (°C)	59.0	57.9	56.5	55.3	54.2	53.1	52.2	51.2	50.3	49.5
理論値 (°C)	60.7	59.3	57.9	56.5	55.2	54.0	52.8	51.7	50.6	49.5
誤差	1.7	1.4	1.4	1.2	1.0	0.9	0.6	0.5	0.3	

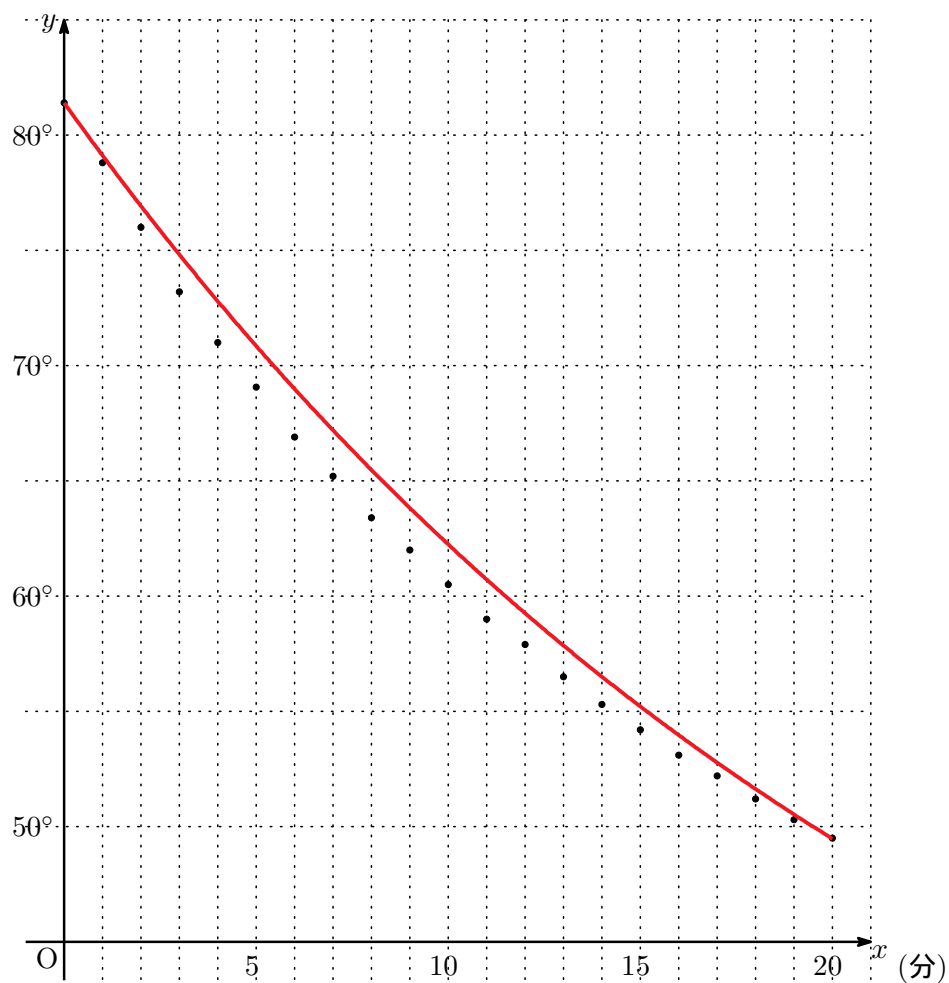
点がデータをプロットしたもので，赤の実線が理論値の値である。やや誤差がはっきりと出てしまったが，しかし実験のデータは満足するレベルだと感じている。

このグラフを直線で結ぶ生徒はさすがにいないと思ったんだけど…。身近な現象に新しい曲線のグラフがあるんだという思いを抱かせれば授業は成功だと思います。若い先生はグラフソフトと組み合わせた授業が開発できるんじゃないかな。

目新しい器具はなく，生徒も一度は扱ったことのある器具ですので数学の教員以上に生徒の方が慣れていると思います。ここで自分なりに誤差を少なくした工夫をいくつか書いておきます。

- ・ピーカーを生徒に配布する前に，ピーカーに一度お湯を入れて暖めた。(湯通しです。)
- ・温度の測り始めは温度計が下がりはじめてから始めるように注意しておいた。

とりたてて専門的なことではありません。この実験は本当にシンプルです。



5.3.1.3 お湯の温度実験の器具

(1) 温度計 (アルコール温度計)



・定番の温度計ですね。100°Cまで計れます。

(2) タイマー (キッチンタイマー)



・自分の学校にはストップウォッチの代わりにキッチンタイマーが理科室に用意してあったので今回はそれを使用しました。

(3) お湯 (5 Lの電動ポット)



・保温型のポットだとお湯が冷めると思って、電動ポットにしました。実験の直前まで沸かしていました。

(4) ビーカー (200 cc)



・今回は一般的な200 ccタイプのビーカーを使用しました。