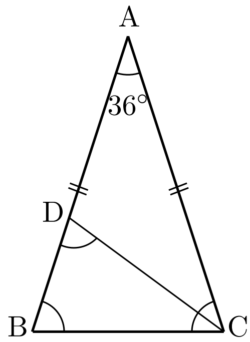
1.4.2.4　特別な三角比の値その 2

15 の倍数の三角比は根号の記号を用いてまぁまぁの形で表すことができる。もう一つまぁまぁの形になる角度は知っていますか？ 18 の倍数の三角比です。



右のような頂角が 36° の二等辺三角形 ABC から始めます。正五角形の 2 つの対角線からできる二等辺三角形です。黄金三角形と呼ばれています。ここで一つの底角 (例．$\angle$C) の二等分線と対辺が交わる点を D とします。この図では $\mathrm{CB}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}$，$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{CBD}$ です。ここで BC の長さを 1 として DB の長さを x とすると相似の関係より

$$(x+1):1=1:x \text{ これより } x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ より}$$

$$\mathrm{AB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ここで AB の長さは黄金数と呼ばれる数で φ（ファイ）で表します。この数は 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解です。これより頂角の二等分線の直角三角形を考えると

$$\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\varphi}=\frac{1}{2\varphi}=\frac{\varphi^2-\varphi}{2\varphi}=\frac{\varphi-1}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

です。また点 C から降ろした垂線で $\cos 36^\circ$ の値を調べると

$$\cos 36^\circ=\sin 54^\circ=\frac{1+\sin 18^\circ}{\varphi}=\frac{1+\frac{1}{2\varphi}}{\varphi}=\frac{2\varphi+1}{2\varphi^2}$$

ここで φ は $x^2-x-1=0$ の解であるので $\varphi^2=\varphi+1$

$$(\text{与式})=\frac{\varphi+\varphi+1}{2\varphi^2}=\frac{\varphi+\varphi^2}{2\varphi^2}=\frac{\varphi+1}{2\varphi}=\frac{\varphi^2}{2\varphi}=\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここで $\sin 54^\circ-\sin 18^\circ=\dfrac{1}{2}$ です。この問題を授業課題とするかはお任せするとして，この三角比が美しいかどうかは φ について理解しないと感動しないかもしれない。でも，美しい〜。