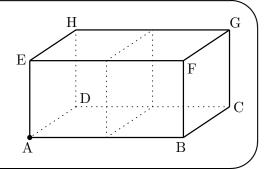
1.3.3 最遠問題

あるコラムに以下の問題が載っていました、まずは考えてみてください。

問. 立方体を2つつなげた直方体を考えます。 一つの頂点をAとしたとき,立体の表面 を通る折れ線でAから一番離れている点 はどこにあるのでしょう?



簡単そうですね。「点 G に決まってるじゃん!」という声が聞こえてきそうです。しかしそうではないのです。検証してみましょう。

正方形の一辺の長さをaとするとき, H

$$\ell_1^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$

$$= 8a^2$$

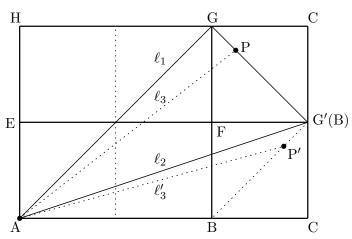
$$\ell_1 = 2\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{128}}{4}a$$

$$\ell_2^2 = (3a)^2 + a^2$$

$$\ell_2^2 = (3a)^2 + a^2$$
$$= 10a^2$$

$$\ell_2 = \sqrt{10} \, a$$

通る辺 (EF か BF) によって長さが 異なります。よって最短は ℓ_1 になり ます。



ここで点 G と点 B を結ぶ対角線上を動く動点 P を考えます。点 G から点 P までの横方向距離を t とすると点 A を原点としたときの G の座標は G(2a+t,2a-t), G'(3a-t,a-t) と表すことができます。この点 P は G から B に対角線に沿って移動すると辺 EF を通る長さ (ℓ_1) は長くなりますが,辺 BF を通る長さ (ℓ_2) は短くなります。さてどこで同じになるのでしょうか,計算してみましょう。

$$\begin{split} \mathrm{AP}^2 &= (2a+t)^2 + (2a-t)^2 & \mathrm{AP'}^2 = (3a-t)^2 + (a-t)^2 \\ &= 8a^2 + 2t^2 & = 10a^2 - 8at + 2t^2 \\ \mathrm{AP}^2 &= \mathrm{AP'}^2 \ \ \ \, b \ \ 8a^2 + 2t^2 = 10a^2 - 8at + 2t^2 \\ & 8at = 2a^2 \\ & t = \frac{1}{4}a \\ \ \ \, \sharp \ \ \ \, \tau \ \ell_3 = \frac{\sqrt{130}}{4}a \end{split}$$

この問題が授業で使えるかは各先生方に考えてもらうとして、授業中の話題としては取り上げてもいいかな? って感じました。

この問題はマーチン・ガードナーの「現代の娯楽数学」の中に載っていて、発見者は日本人数学者小谷善行 (東京農工大学教授) だそうです。「数学のひろば」大日本図書より引用しましたが、詳しい説明は1996年9月号の数学セミナーの「エレガントな解答をもとむ」の解説をご覧下さい。