2.2.3　正多角形を作図しよう！

指導内容	学　習　活　動	備　考
正三角形	問．正三角形を作図してみよう。	・持ち物：三角定規，コンパス
正多角形	問．他の正多角形を作図してみよう。 ・正方形　・正六角形 ・正八角形	
正五角形	問．どうして正五角形や正七角形がないのだろう？	

普段，何気なく書いている図形も作図で書くとなると大変になる時が多い。生徒は自然と定規の角を使っていたり，ノートの罫線を使っていたりする。融通が利かない作図の不便さを知りつつ，できた時には美しくできる作図の長所，短所を知る授業である。正七角形が作図不能の説明を授業の終わりに説明するのもいいだろう。

2.2.3.1　正五角形の作図その 1

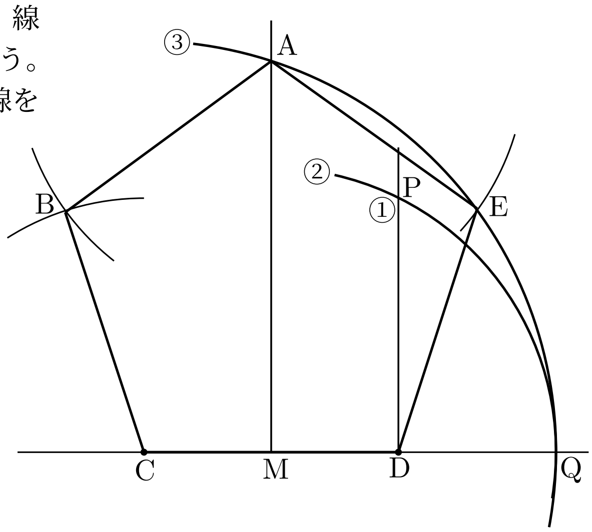
ところで正五角形の作図は覚えていますか？ 線分 CD を 1 辺とする正五角形を作図してみよう。まず点 D を通る垂線と線分 CD の垂直二等分線を引いた図をスタートに説明しよう。

① 点 D の垂線上に CD = DP となる点 P をとる。

② 線分 CD の中点 M を中心に半径 MP の円を書き，直線 CD の延長線上の交点を Q とする。

③ 点 C を中心に半径 CQ の円を書き線分 CD の垂直二等分線との交点を A とする。

④ 後は半径を線分 CD として，中心 A と③の円の交点が点 E となり，点 A と点 C を中心とした円の交点が B となる。



2.2.3.2　正五角形の作図その 2

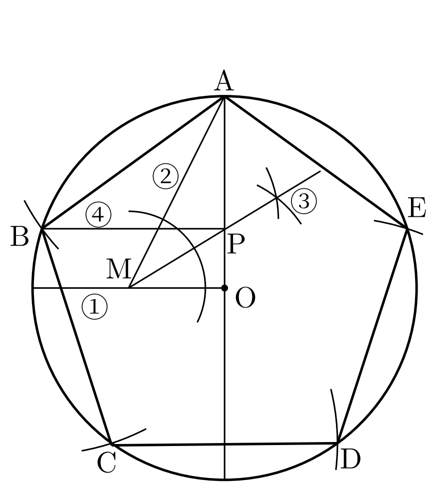
生徒にとっては円を使った作図の方がいいかもしれません。(この場合には正五角形の一辺の長さは円の半径を r とすると $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}r \fallingdotseq 1.17557\cdots\times r$ になります。)

① 円 O の中心から直径に垂直な線を引く。(作図略)

② ①の線分の中点 M を求め，点 A と点 M を結ぶ。(作図略)

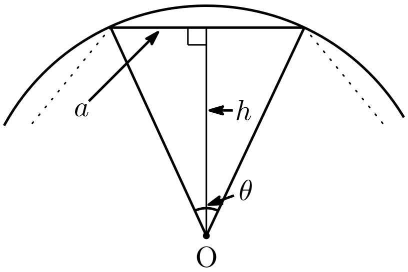
③ ∠AMO の二等分線を引き OA との交点を P とする。

④ 点 P を通り線分 OM に平行な線を引き円 O との交点を B とする。線分 AB が正五角形の一辺の長さである。



2.2.3.3　正多角形の 1 辺の長さ

2022 年 2 月号の数学セミナーに刺激を受けて正多角形の辺の長さを考察してみました。



半径 r の円に内接する正 n 角形の面積 S は

$$S = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

で求められることを学びました。

正 n 角形	中心角 $\theta = \dfrac{360^\circ}{n}$	$\cos\theta$	a(底辺)	h(高さ)	$\dfrac{S}{r^2}$
3	120°	$-\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}\,r$	$\dfrac{1}{2}r$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4} = 1.299\cdots$
4	90°	0	$\sqrt{2}\,r$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}r$	2
5	72°	$\dfrac{1}{2\varphi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}\,r$	$\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}\,r$	$\dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} = 2.377\cdots$
6	60°	$\dfrac{1}{2}$	r	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 2.598\cdots$
8	45°	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}r$	$2\sqrt{2} = 2.828\cdots$
10	36°	$\dfrac{1}{2}\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}\,r$	$\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\,r$	$\dfrac{5}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2.938\cdots$
12	30°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{3}}\,r$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}r$	3
20	18°	$\dfrac{\sqrt{\varphi+2}}{2}$	$\sqrt{2-\sqrt{\varphi+2}}\,r$	$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{\varphi+2}}}{2}r$	$5\sqrt{2-\varphi} = 3.090\cdots$
24	15°	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}\,r$	$\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}\,r$	$3\sqrt{6}-3\sqrt{2} = 3.105\cdots$

備考 ・底辺 a は余弦定理より $a = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos\theta} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}\cdot r$

- 高さ h は三平方の定理より $h = \sqrt{r^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$
- 三角比の性質上 θ が 15 または 18 の倍数にならないと $\cos\theta$ の値の表現が困難になるため n が制約される。(正 9 角形や正 15 角形等の考察がないのはそのためである。)
- φ は黄金比の値，2 次方程式 $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ を満たす正の解で $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。
- 参考　内接正 24 角形の周の長さ ℓ で円周率 π を近似すると
  $\pi = \dfrac{\ell}{2r} = \dfrac{an}{2r}$ より $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} \times 24 = 3.132\cdots\cdots$ になる。
- 参考　外接正多角形の 1 辺の長さ a' は相似の関係より $a' = \dfrac{ar}{h}$ から求めることができる。

(2022 年 2 月 14 日追記，4 月 14 日修正)