2.3　数学と人間の活動

2.3.1　10 円プレゼント

今日は君たちにプレゼントするための 10 円玉をたくさん持ってきました。
じゃぁね，3 桁の好きな数字を決めて下さい。
その数字が何枚の 10 円玉を手に入れることができるかを決めてくれます。

決まりましたか？

ではその数字を 2 回続けてくっつけて，6 桁の数を作ってください。
自分の決めた数字が 123 なら 6 桁の数は 123123 となります。

その数を 7 で割ったときの余りの数だけ 10 円玉をプレゼントします。

(「5 分で楽しむ数学 50 話」エアハルト・ベーレンツ著，鈴木直訳，岩波書店)

ちょっとした時間があった時とか，各学年における「式の計算」の導入でも使えそうな問題である。さて何枚の 10 円玉がプレゼントされただろうか？

実は例であげた 123 で考えると $123123 \div 7 = 17589$ となり余らず割り切れてしまうのです。

今自分の決めた 3 桁の数字を順に a, b, c とします。すると 6 桁の数は $100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c$ になる。ではこの数を 7 で割った余りを計算してみよう。

$$
\begin{aligned}
&100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c \\
=&100100a + 10010b + 1001c \\
=&7(14300a + 1430b + 143c)
\end{aligned}
$$

となり，どんな a, b, c を決めても，教師は 1 枚も 10 円玉を損することなく，生徒は一生懸命に計算することで計算力がつくという問題です。

授業として考えると，

生徒「あれ割り切れちゃったよ。」
生徒「これじゃ10 円もらえない。」
教師「誰か 10 円もらえる人いますか？しょうがないなぁ〜。もう一度チャンスをあげましょう。異なる 3 桁の数でもう一度やってみましょう。」
生徒「あれ？またダメだ。」
生徒「どうしてだろう…。」
教師「どうして誰も 10 円もらえないんだろう。考えてみようよ。」

こんな感じでどうでしょうか。式変形は中学 2 年のやや難しい位の程度でしょうか。ただ導入がシンプルで自然な流れなので問題はつかみやすいと思います。授業としても成り立つし，ちょっとした話題作りにも使えると思います。

上の数 N は

$$
\begin{aligned}
N &= 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c \\
&= 1001(100a + 10b + c) \\
&= 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 10b + c)
\end{aligned}
$$

このことから他に 11 でも 13 でも割り切ることができます。

(2021 年 2 月 18 日追記，2022 年 11 月 16 日修正)

2.3.1.1　元気話．7 の倍数の見分け方

簡単な 7 の倍数の見分け方を発見したので紹介しておきます。1 の位の数の 2 倍を元の数の 1 の位を省いた数から引いたとき 7 の倍数であれば 7 の倍数である。

例．11193 の場合は　(1)　$1119 - 3 \times 2 = 1113$
(2)　$111 - 3 \times 2 = 105$
(3)　$10 - 5 \times 2 = 0$　0 は 7 の倍数なので 11193 は 7 の倍数である。
$11193 = 7 \times 1577$

(参考文献 : 数学セミナー 2003 年 3 月号 P59)

5 桁の数を例に説明しましたが，実は N の十の位以降の数を a，一の位を b とすることで説明できます。

$a - 2b = 7k$(k は整数) より $a = 7k + 2b$

$$\begin{aligned} N &= 10a + b \\ &= 10(7k + 2b) + b \\ &= 7(10k + 3b) \end{aligned}$$

よって $a - 2b$ が 7 の倍数のとき N は 7 の倍数になる。

同僚の先生にこれでいいかなぁ〜って見せたところ，逆もいわないと完全じゃないといわれました。ようするに $a - 2b$ が 7 の倍数ならば N は 7 の倍数はいいのだけど，N が 7 の倍数のとき $a - 2b = 7k$ が成り立つことをいわないと同値関係にならないということです。

$N = 10a + b = 7k$ より $b = 7k - 10a$

$$\begin{aligned} a - 2b &= a - 2(7k - 10a) \\ &= 21a + 14k \\ &= 7(3a + 2k) \end{aligned}$$

よって N が 7 の倍数のとき $a - 2b$ は 7 の倍数になる。

数学セミナーでは $10m \pm 1$ と $10m \pm 3$ の数の倍数についてこのような式変形からの考察がありました。参照してください。

2.3.1.2　元気話．11 の倍数の見分け方と性質

証明は各先生方にやってもらうとして省略しますが，11 の倍数の見分け方は偶数桁の数の和と奇数桁の数の和の差が 11 の倍数であれば 11 の倍数になります。

例．$2024 = 11 \times 184 \rightarrow (2 + 2) - (0 + 4) = 0$

11 の倍数の見分け方からもわかりますが，11 の倍数は逆から並べても 11 の倍数です。

例．$4202 = 11 \times 382$

(2022 年 11 月 16 日追記)