2　数学 A

2.1　場合の数と確率

2.1.1　神経衰弱の確率

誰もが知っている，そして一度はやったことがある「神経衰弱」。伏せてある状態のカードから 2 枚のカードを開いて同じカードだったらもう一度カードを開いて，違うカードだったら開いたカードを伏せて，次の人がカードを開くというゲームです。最終的には自分の見つけたカードの枚数を競います。

自分がこの「神経衰弱」に興味を持ったのは次の新聞のコラム (週刊将棋 2012 年 10 月 10 日号茶柱より) を読んだからです。

> トランプに神経衰弱というゲームがある。裏にしたカードを 2 枚表にして同じ数の札なら取れる。ルールが簡単なので子供の頃に遊んだ方も多いだろう。
>
> しかしこのゲームに勝つ最善の戦略を考え出すと結構面白い。やみくもにカードを表にすると，少ない当たりの確率と引き換えに，相手に情報を与えて利敵行為になるからだ。
>
> 単純な例として，2 人で遊んでいて場に 3 組 6 枚の札があり，そのうち 1 枚だけ何だか判明している状況を考える。最初に 1 枚引いて外した場合に，2 枚目に残り 4 枚から 1 枚の当たり札を引きに行くよりは，すでに判明している札を引いてわざと外したほうが勝つ確率が高いのである。
>
> 残り 4 組 8 枚でうち 2 枚が判明している状況では，あまり美しくないが両者がその 2 枚をめくり合って千日手になるのが最善のようだ。(以下略)

場面を設定して考察してみます。◎…既知のペアカードを開いた，○…前回開いたペアカードを開きとった，×…新規のカードだった，P…パスした (既知のカードを開いた) とします。またプレイヤーを P_1(先手)，P_2(後手) とします。また表の中の番はその時カードを開く人，丸数字はカードを開く順を表しています。

(1) カード 4 枚のとき

(i) カード 4 枚で 1 枚もわかっていないとき

スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 \fallingdotseq 0.333\cdots$, $P_2 \fallingdotseq 0.666\cdots$ です。

場合	2 枚目までの結果			3 枚目以降の結果	
	①②	P_1	P_2	番③④	総合結果
(a)	×○	1	0	P_1×○	→② −0 で P_1 の勝ち
(b)	××	0	1	P_2◎○	→ 0− ②で P_2 の勝ち

(ii) カード 4 枚で 1 枚わかっているとき

スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 \fallingdotseq 0.666\cdots$, $P_2 \fallingdotseq 0.333\cdots$ です。

場合	2 枚目までの結果			3 枚目以降の結果	
	①②	P_1	P_2	番③④	総合結果
(c)	◎○	1	0	P_1×○	→② −0 で P_1 の勝ち
(d)	×○	1	0	P_1◎○	
(e)	××	0	1	P_2◎○	→ 0− ②で P_2 の勝ち

調べてみて感じたことなんですが，この「神経衰弱」というゲームは公平なゲームではないことを知りました。

(2) カード 6 枚のとき

(i) カード 6 枚で 1 枚もわかっていないとき

スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 \fallingdotseq 0.466\cdots$, $P_2 \fallingdotseq 0.533\cdots$ です。

<table>
<tr><th rowspan="2">場合</th><th colspan="3">2 枚目までの結果</th><th colspan="3">4 枚目までの結果</th><th colspan="2">5 枚目以降の結果</th></tr>
<tr><th>①②</th><th>P_1</th><th>P_2</th><th>番③④</th><th>P_1</th><th>P_2</th><th>番⑤⑥</th><th>総合結果</th></tr>
<tr><td>(a)</td><td rowspan="2">×○</td><td rowspan="2">0.333</td><td rowspan="2">0.666</td><td>P_1×○</td><td>1</td><td>0</td><td>P_1◎○</td><td>→③ −0 で P_1 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>P_1××</td><td>0</td><td>1</td><td>P_2◎○</td><td>→1− ②で P_2 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(c)</td><td rowspan="6">××</td><td rowspan="6">0.5</td><td rowspan="6">0.5</td><td rowspan="3">P_2◎○</td><td rowspan="3">0.333</td><td rowspan="3">0.666</td><td>P_2◎○</td><td rowspan="2">→0− ③で P_2 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(d)</td><td>P_2×○</td></tr>
<tr><td>(e)</td><td>P_2××</td><td>→② −1 で P_1 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(f)</td><td>P_2×○</td><td>0</td><td>1</td><td>P_2◎○</td><td>→0− ③で P_2 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(g)</td><td>P_2××</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">P_1◎○</td><td rowspan="2">→③ −0 で P_1 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(h)</td><td>P_2×P</td></tr>
</table>

場合(c)〜(h)はカード 6 枚で 2 枚わかっているときの状態になります。(先後逆)

(ii) カード 6 枚で 1 枚わかっているとき

スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 \fallingdotseq 0.266\cdots$, $P_2 \fallingdotseq 0.733\cdots$ です。

<table>
<tr><th rowspan="2">場合</th><th colspan="3">2 枚目までの結果</th><th colspan="3">4 枚目までの結果</th><th colspan="2">5 枚目以降の結果</th></tr>
<tr><th>①②</th><th>P_1</th><th>P_2</th><th>番③④</th><th>P_1</th><th>P_2</th><th>番⑤⑥</th><th>総合結果</th></tr>
<tr><td>(i)</td><td rowspan="2">◎○</td><td rowspan="2">0.333</td><td rowspan="2">0.666</td><td>P_1×○</td><td>1</td><td>0</td><td>P_1×○</td><td>→③ −0 で P_1 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(j)</td><td>P_1××</td><td>0</td><td>1</td><td>P_2◎○</td><td>→1− ②で P_2 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(k)</td><td rowspan="3">×○</td><td rowspan="3">0.666</td><td rowspan="3">0.333</td><td>P_1◎○</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td>P_1×○</td><td rowspan="2">→③ −0 で P_1 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(l)</td><td>P_1×○</td><td>P_1◎○</td></tr>
<tr><td>(m)</td><td>P_1××</td><td>0</td><td>1</td><td>P_2◎○</td><td>→1− ②で P_2 の勝ち</td></tr>
<tr><td>(n)</td><td>××</td><td>0.166</td><td>0.833</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(o)</td><td>×P</td><td>0.5</td><td>0.5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(i) の場合(a)ですが，カードを開く前の P_1 の勝つ確率が $0.466\cdots$ で，カードを 1 組とってしまうと勝つ確率が $0.333\cdots$ と下がってしまいます。カードを取れば勝つ確率が上がると思うのが普通だと思うのですが，これがこのゲームの面白いところなのでしょうね。

場合(n)と(o)がむやみにカードを開いてはいけないという典型的な例でしょう。

授業用に以下のような問題を作りました。

問. 太郎君と次郎君がトランプを使って神経衰弱というゲームをします。このゲームは裏返してあるカードを 2 枚めくって，同じカードなら取ることができ，異なるカードだったときはもう一度裏返しにして元に戻し，相手の手番になります。

6 枚のカードで戦い太郎君が先に次郎君が後に取ります。今，先手の太郎君が 2 枚のカードをめくって同じでなかったのでまた裏返したところです。このとき次に引く次郎君とその次に引く太郎君 2 人のそれぞれの勝つ確率を求めなさい。ただし一度めくったカードがどこにあるかは忘れないとし，一度めくったカードは確実に次取ることができるまで開かないこととします。

おまけで 8 枚のときも調べました。

(3) カード 8 枚のとき

(i) カード 8 枚で 1 枚もわかっていないとき
スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 = 0.6$, $P_2 \fallingdotseq 0.266\cdots$ で引き分けの確率が $P \fallingdotseq 0.133\cdots$ です。

場合	2 枚目までの結果			4 枚目までの結果			5 枚目以降の結果	
	①②	P_1	P_2	番③④	P_1	P_2	番⑤⑥	総合結果
(a)	×○	0.466	0.4	P_1×○	0.333	0	P_1	→ 4 枚で 1 枚もわかっていないときと同値
(b)				P_1××	0.5	0.5	P_2	→ 6 枚で 2 枚わかっているときと同値 (先後逆)
(c)	××	0.622	0.244	P_2◎○	0.533	0.266	P_2	→ 6 枚で 1 枚わかっているときと同値 (先後逆)
(d)				P_2×○	0.333	0.5	P_2	→ 6 枚で 2 枚わかっているときと同値 (先後逆)
(e)				P_2××	0.75	0.166	P_1	→ 8 枚で 4 枚わかっているときと同値
(f)				P_2×P	0.333	0.516	P_1	→ 8 枚で 3 枚わかっているときと同値
(g)				P_2P P	0.244	0.622	P_1	→ 8 枚で 2 枚わかっているときと同値

(ii) カード 8 枚で 1 枚わかっているとき
スタート時のそれぞれの勝つ確率は $P_1 \fallingdotseq 0.466\cdots$, $P_2 = 0.4$ で引き分けの確率が $P \fallingdotseq 0.133\cdots$ です。

場合	2 枚目までの結果			4 枚目までの結果			5 枚目以降の結果	
	①②	P_1	P_2	番③④	P_1	P_2	番⑤⑥	総合結果
(h)	◎○	0.466	0.4	6 枚の場合(a)〜(h)と同値，ただし後手 1– ②勝ちは引き分け				
(i)	×○	0.266	0.533	6 枚の場合(i)〜(o)と同値，ただし後手 1– ②勝ちは引き分け				
(j)	××	0.516	0.333	P_2◎○	0.333	0.5	P_2	→ 6 枚で 2 枚わかっているときと同値 (先後逆)
(k)				P_2×○	0	1	P_2	→ 6 枚で 3 枚わかっているときと同値 (先後逆)
(l)				P_2××	1	0	P_1	→④ –0 で先手勝ち
(m)				P_2×P	0.75	0.166	P_1	→ 8 枚で 4 枚わかっているときと同値
(n)				P_2P P	0.333	0.516	P_1	→ 8 枚で 3 枚わかっているときと同値
(o)	×P	0.622	0.244	→場合(c)〜(g)と同値				

場合(j)〜(n)はカード 8 枚で 3 枚わかっているときの状態になります。(先後逆) また，2 人の確率を加えても 1 にならないのは引き分けの場合があるからです。

8 枚でプレイ時 2 枚カードがわかっている場合はすごいですね。先に 3 枚目を相手に開かせたほうが自分が勝つ確率が上がるなんてすごい！ すごい！ そして 8 枚で 1 枚もわかっていないとき，先に開いた P_1 はカードを取らないほうが勝つ確率があがる (0.6 → 0.622) こともすごいと思いました。

う〜ん。こんな高等戦術があったとは〜。でも神経衰弱のゲームはいろいろな場面設定が考えられるのでもっとおもしろい場面あるかもしれませんね。2 人で戦うのではなくて 3 人，4 人と変えて考えるとか，世の中の「神経衰弱」にはオールマイティカード (ジョーカー) とかマイナーなルールもあるようです。

自分は根が素直で欲張りなので，今までは必ず新しいカードをめくっていました。今度から機会があったら考えてめくるようにします。

このことを調べていく過程で思ったのですが，ゲーム名が「神経衰弱」ってどうして言うんだろうって思いました。で，わかりました。この確率を調べていったら確かに自分の神経が衰弱したからです (疲れました〜)。(^^;