3.2 複素数と方程式

3.2.1 高次方程式と $\sqrt{i}$

目　標　高次方程式の解法を通して，虚数単位 i に関する理解を深める。

<table>
<tr><th>学習活動</th><th>備考</th></tr>
<tr><td>

問. 次の方程式を解いてみよう。

(1) $x^3-1=0$
$(x-1)(x^2+x+1)=0$
$x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(2) $x^3+1=0$
$(x+1)(x^2-x+1)=0$
$x=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

(3) $x^4-1=0$
$(x^2-1)(x^2+1)=0$
$x=\pm1,\ \pm i$

(4) $x^4+1=0$
$x^4=-1$
$x^2=\pm i$
$x=\pm\sqrt{i},\ \pm\sqrt{-i}$

</td><td>

・$x^3-1=0$ を満たす虚数解は ω（オメガ）で表す。
・$x^2=t$ と置き換えても可。

</td></tr>
<tr><td>

問. ここででてきた $\sqrt{i}$ や $\sqrt{-i}$ はどんな数なんだろう？

$x^4+1=0$ を他の方法で解くことはできないだろうか？

$$\begin{aligned} x^4+1&=0\\ x^4+1+2x^2-2x^2&=0\\ (x^2+1)^2-2x^2&=0\\ (x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2&=0\\ (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)&=0\\ x&=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2},\ \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}\end{aligned}$$

</td><td>

・ある程度考えさせ因数分解による解法のヒントを与える。

</td></tr>
<tr><td>

問. どうやって対応させたらいいんだろう？

$\sqrt{i}$	$-\sqrt{i}$	$\sqrt{-i}$	$-\sqrt{-i}$
$\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$	$\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$	$-\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$
$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$

</td><td>

・4つの解は対称群になっているので基本どれを基準にしても良い。
・$\sqrt{-i}=\sqrt{i}\,i$
・分母を有理化しない方が簡単な形になることを伝える。
・$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$
$=e^{\frac{\pi}{4}i}$

</td></tr>
<tr><td>

問. $17=2^4+1$ で表せることより，今日の式変形を利用していろいろな積の形に表してみよう。

$17=(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})$　　$17=(4+i)(4-i)=(1+4i)(1-4i)$
$17=(6+\sqrt{19})(6-\sqrt{19})$　　$17=(3+2\sqrt{2}\,i)(3-2\sqrt{2}\,i)$
$17=(7+4\sqrt{2})(7-4\sqrt{2})$　　$17=(2+\sqrt{13}\,i)(2-\sqrt{13}\,i)$

</td><td>

・時間があれば ω の性質にも触れる。

</td></tr>
</table>