3.5.2 常用対数とブリックス

目　標　常用対数の近似値を求めることにより，常用対数に対する理解を深める。

学　習　活　動	備　考
問. 教科書の裏表紙を見てみよう。そこに常用対数表がある。これはブリックスという人がまとめたんだ。今日はみんなに自力で常用対数の値を求めることに挑戦してみよう！	・ブリックスについては資料参照 ・常用対数表の使い方
$\log_{10} 2$ の値は $2^{10} = 1024 \fallingdotseq 10^3$ を使います。 $\log_{10} 2^{10} \fallingdotseq 1000 = \log_{10} 10^3$ $10\log_{10} 2 = 3$ $\log_{10} 2 = 0.3$	・黒板に値を書き込むための $\log_{10} 1$〜$\log_{10} 10$ の表を作る。
問. さあ，この値を使って残りの基本常用対数 $\log_{10} 3$〜$\log_{10} 10$ の値を求めよう！	

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2\log_{10} 2 \fallingdotseq 2 \times 0.3 = 0.6$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \fallingdotseq 1 - 0.3 = 0.7$$

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3\log_{10} 2 \fallingdotseq 3 \times 0.3 = 0.9$$

学　習　活　動	備　考
問. 残った $\log_{10} 3$, $\log_{10} 6$, $\log_{10} 7$, $\log_{10} 9$ はどの値がわかれば求めることができるのだろう。	
・$\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2\log_{10} 3$ だから $\log_{10} 3$ の値がわかればいい。 ・$\log_{10} 3$ の値がわかれば $\log_{10} 6$ だってわかるはず。 ・$\log_{10} 7$ も必要じゃないかな。	・ある程度考えさせてからヒントを与える。
$\log_{10} 3$ の値は $3^4 = 81 \fallingdotseq 80$ を使います。 $\log_{10} 7$ の値は $7^2 = 49 \fallingdotseq 50$ を使います。	・$7^4 = 2401$ と比較するのもいい

$$\log_{10} 3^4 \fallingdotseq \log_{10} 80$$
$$4\log_{10} 3 = \log_{10} 8 \times 10 = \log_{10} 8 + \log_{10} 10 \fallingdotseq 3 \times 0.3 + 1 = 1.9$$
$$\log_{10} 3 = 0.475$$

$$\log_{10} 7^2 \fallingdotseq \log_{10} 50$$
$$2\log_{10} 7 = \log_{10} \frac{100}{2} = \log_{10} 100 - \log_{10} 2 \fallingdotseq 2 - 0.3 = 1.7$$
$$\log_{10} 7 = 0.85$$

学　習　活　動	備　考
問. 求めた値を常用対数表と比較して誤差を確認してみよう！	・ブリックスの求め方から計算の困難さとその努力を解説 (資料参照)

n	常用対数表	近似値	n	常用対数表	近似値
1	0	0	6	0.7782	0.775
2	0.3010	0.3	7	0.8451	0.85
3	0.4771	0.475	8	0.9031	0.9
4	0.6021	0.6	9	0.9542	0.95
5	0.6990	0.7	10	1	1

3.5.2.1　常用対数表

実は 2019 年 4 月から高校 2 年生を教えている。前年が中学 3 年だったので 1 年飛び級をしたわけだが，これがかなり大変なんだ。数学教材の内容が大変ではなく数学の教材構成，ようするに数学 I と数学 A で何を生徒が学習しているのかがわからないと，何をベースに問題を考えていけばいいかがわからないからだ。1 学期はこのことでかなり悩んだ。そして今数学 II で対数関数の指導に入った。普段のように教材研究をしていると常用対数表が教科書巻末にあることに気がついた。昔は計算尺なんか使って解いたなぁ〜，郷愁の気持ちで常用対数表を眺めていたらこの値はどうやって出てきたの？ どうして求めたのだろう？ 確か三角比のスタートは実測値から始まったことは知っていた。この常用対数の値は？

3.5.2.2　ヘンリー・ブリッグス

調べていくと常用対数はヘンリー・ブリッグス (1561-1630) という人がネイピアの承諾を得て底が 10 の常用対数を発表したとあった。ではどんな計算したのだろう？ 正解は雑誌 Newton2015 年 4 月別冊号にあった。以下は雑誌からの抜粋である。

> ブリッグスが常用対数表をつくるために行った計算方法について，$\log_{10} 2$ の値を求める場合を例として，現代風に少しアレンジしたものを紹介します。まず「10 の平方根」,「さらにその平方根 (10 の平方根の平方根，つまり 10 の 2^2 乗根 $=$ 10 の 4 乗根)」,「またさらにその平方根 (10 の平方根の平方根の平方根，つまり 10 の 2^3 乗根 $=$ 10 の 8 乗根)」といった具合に，平方根をくり返し求める計算を膨大な量の手計算でくり返します。当時，平方根を求める計算方法 (開平法) はすでに知られていました。ブリッグスは，10 の 2^{54} 乗根を，小数点以下 32 桁まで求めています。

この後 Newton では長々と説明が続くが，自分が理解した求め方を記述する。

求める数 $\log_{10} 2$ を x とします。ようするに $10^x = 2$ ということです。ここで指数法則より

$$(10^x)^{\frac{1}{2^c}} = 2^{\frac{1}{2^c}}$$
$$(10^{\frac{1}{2^c}})^x = 2^{\frac{1}{2^c}}$$

この c が開平計算の回数です。あとは $(1+a)^x \fallingdotseq 1 + ax$ を使います。この式は a の値が十分に小さいとき近似できることが知られています。ようするに平方根を何回も計算するのはこの式から出る誤差を少なくするために行っているのです。今 10 の開平計算の小数部分を a，2 の開平計算の小数部分を b とすると

$$1 + ax \fallingdotseq 1 + b$$
$$x = \frac{b}{a}$$

となり小数部分のみの計算で求めることができます。

3.5.2.3　ブリッグスの計算

ブリッグスと同じ計算をやってみました。計算を小数点以下を 32 桁にとどめて，$\log_{10} 2$ の計算です。ただし筆算ではなく U − BASIC を使ってですが…。

c	$1+b=2^{\frac{1}{2^c}}$	$1+a=10^{\frac{1}{2^c}}$
1	1.41421356237309504880168872420969	3.16227766016837933199889354443271
2	1.18920711500272106671749997056047	1.77827941003892280122542119519268
3	1.09050773266525765920701065576070	1.33352143216332402567593171529532
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	1.00067713069306635667817278487463	1.00225114829291291546567363886656
20	1.00000066103688207420882892605024	1.00000219591867555420331713750548
30	1.00000000064554361699491150529813	1.00000000214444947937776742976403
40	1.00000000000063041368826831221135	1.00000000000209418894246160262640
50	1.00000000000000061563836744932977	1.00000000000000204510638912051948
51	1.00000000000000030781918372466483	1.00000000000000102255319456025921
52	1.00000000000000015390959186233240	1.00000000000000051127659728012947
53	1.00000000000000007695479593116619	1.00000000000000025563829864006470
54	1.00000000000000003847739796558309	1.00000000000000012781914932003234
55	1.00000000000000001923869898279154	1.00000000000000006390957466001616

c	$b \div a$	$\log_{10} 2$ との誤差
1	0.19156353968936612329123805747105	0.10946645597461507192250083725344
2	0.24310949584707446408563208892568	0.05792049981690673112810680579881
3	0.27137006482071115529557204923898	0.02965993084327003991816684548551
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
10	0.30079346402816082135202557199374	0.00023653163582037386171332273075
20	0.30102976464161503376464733138135	0.00000023102236616144909156334314
30	0.30102999543837338293363357513248	0.00000000022560781228010531959201
40	0.30102999566376087508078694012470	0.00000000000022032013295195459979
50	0.30102999566398097613012346475334	0.00000000000000021908361542997115
51	0.30102999566398107837018036136404	0.00000000000000011684355853336045
52	0.30102999566398112851729850153458	0.00000000000000006669644039318991
53	0.30102999566398113061421015461965	0.00000000000000006459952874010484
54	0.30102999566398111504767167636460	0.00000000000000008016606721835989
55	0.30102999566398108391464070257135	0.00000000000000011129909819215314

自分でやってみてわかったことが 1 つあります。どうしてブリッグスが 54 回の開平計算を行ったのか。それは 53 回目でそれまで大きくなってきた値が，54 回目で小さくなってしまうためです。(上の表で確認できます。) ようするにブリッグスは誤差が最小になる回数まで計算をして，誤差が大きくなる (増加してきた値が減少する) ことを確認して計算を終了したのだということがわかりました。計算は 54 回やったけれど近似値として採用した値は 53 回目の値であろうことは予想できます。

$\log_{10} 2$ の値がわかると

$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \times \log_{10} 2$

$\log_{10} 5 = \log_{10}(10 \div 2) = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$

$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \times \log_{10} 2$

これらの値がわかり，あとは $\log_{10} 3$ と $\log_{10} 7$ の値をもとめて組み合わせればある程度の数の常用対数の値を求めることができることは理解できると思います。

3.5.2.4　常用対数の必要性

コンピュータの時代になり常用対数は過去の遺物になりつつあるのだが，全く必要ないかというとそうでもない。例えば 1000 桁まで計算できるコンピュータがあるとしよう。

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \ (p \text{ は素数})$$

このコンピュータを使って上のように素因数分解できた n の実際の数を求めようとすると，素因数 p_k は 1000 桁未満の数であるのに対して，n の桁数は 1000 桁を上回ってしまうことがあることは明らかである。このような自分の計算能力を超える n に対して常用対数を用いれば n の桁数を求めることができる。

もっと具体的に書くと (m,k)-完全数という数がある。連続して約数の和を求めていって何回 (m) で自身の整数倍 (k) になるのかを表した数である。例えば 4 の約数の和は 7 で，7 の約数の和は 8，結果 2 回で 4 の 2 倍になったので 4 は $(2,2)$-完全数である。一般の完全数は $(1,2)$-完全数である。ここで 659 は 1287 回連続して約数を求めるとようやく自身の整数倍になるのだがその 1287 回目の数は素因数の数が 173 個で桁数を求めるときには常用対数を用いて 1187 桁と算出できた。このときの数は σ を約数関数として以下のようになった。

$\sigma^{1287}(659) = 2^{276} \times 3^{100} \times 5^{44} \times 7^{28} \times 11^{21} \times 13^{14} \times 17^{14} \times 19^{8} \times 23^{11} \times 29^{5} \times 31^{8} \times 37^{10} \times 41^{5} \times 43^{3} \times 47^{4} \times 53 \times 59 \times 61^{7} \times 67^{5} \times 71 \times 73^{2} \times 89^{2} \times 101 \times 107 \times 109^{3} \times 113^{2} \times 127^{5} \times 131 \times 137 \times 139 \times 157^{3} \times 163 \times 167^{2} \times 173 \times 191^{2} \times 197 \times 199 \times 223^{2} \times 229 \times 263^{2} \times 271^{2} \times 307 \times 317 \times 331^{3} \times 347 \times 349 \times 367 \times 409 \times 449 \times 457 \times 463^{2} \times 467 \times 521 \times 593 \times 599 \times 631 \times 659 \times 673 \times 701 \times 757 \times 907 \times 1009 \times 1021 \times 1061 \times 1093 \times \cdots \times 26024244971250991615 9 \times 26029950912266630753077 9$

このような巨大数に関してはまだまだ常用対数は健在なのである。

3.5.2.5　ブリッグスから学ぶ事

開平計算を 1 つの数で小数点以下 32 桁で 54 回も行うことがいかに大変なことか…，言葉でいうほど簡単なことではないことだと感じます。たかが計算，されど計算。しかしこの計算を黙々とやったことに感謝せずにはいられない。小数点以下 32 桁としたことも開平法の 2 桁ごとの計算と，求めたい数の有効数字を考えての事だったことも気がつきました。改めて先人の残した遺産の重みを感じました。

3.5.2.6　雑感

この「対数」を指導していて子供たちからの反応が余りにも薄く感じました。自分の指導力のなさもあると思いますが，教科書の作り方にも問題があると感じました。常用対数の後に，電卓と常用対数表を使った演習問題の頁があればなぁ〜と感じました。例えば 3^{20} は何桁の数ですか？ という問いの後にせっかく補足として $3^{20} = 3486784401$ と書いてあるのだから，常用対数表から求めることができる数と比較しなさい。という一言があるだけで理解が進むと思います。教科書会社のみなさんよろしくお願いします。