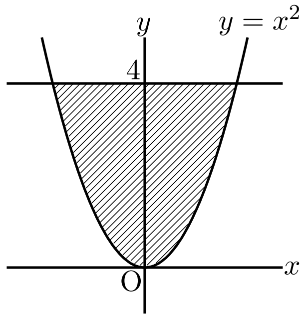
3.6　微分法と積分法

3.6.1　アルキメデスなんかに負けないぞ！

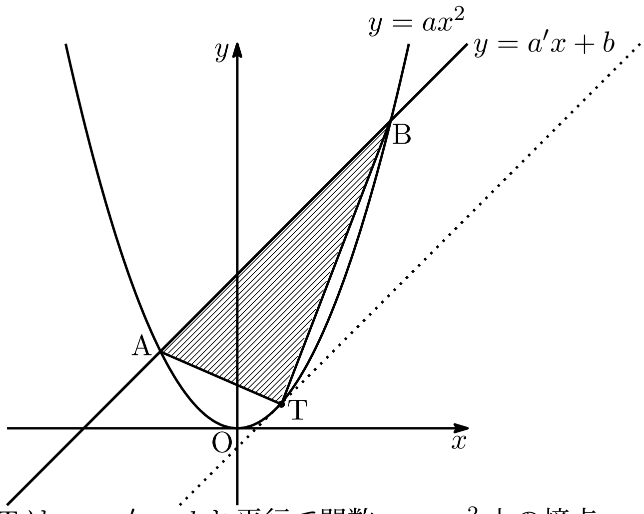
問．右図のように直線 $y=4$ と放物線 $y=x^2$ で囲まれた斜線の部分の面積 S を求めなさい。



アルキメデスが発見した性質は直線と放物線で囲まれる面積は，その直線と平行な直線が放物線の接線となる接点で作られる三角形の $\dfrac{4}{3}$ 倍に等しい。という性質です。ようするに $S=\triangle\mathrm{ATB}\times\dfrac{4}{3}$ ということです。この性質を使うと上記の問題は原点 O が接点 T となるので

$$S=4\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{32}{3}$$

となるのです。アルキメデスってすごいと感じました。



T は $y=a'x+b$ と平行で関数 $y=ax^2$ 上の接点

3.6.1.1　放物線と直線

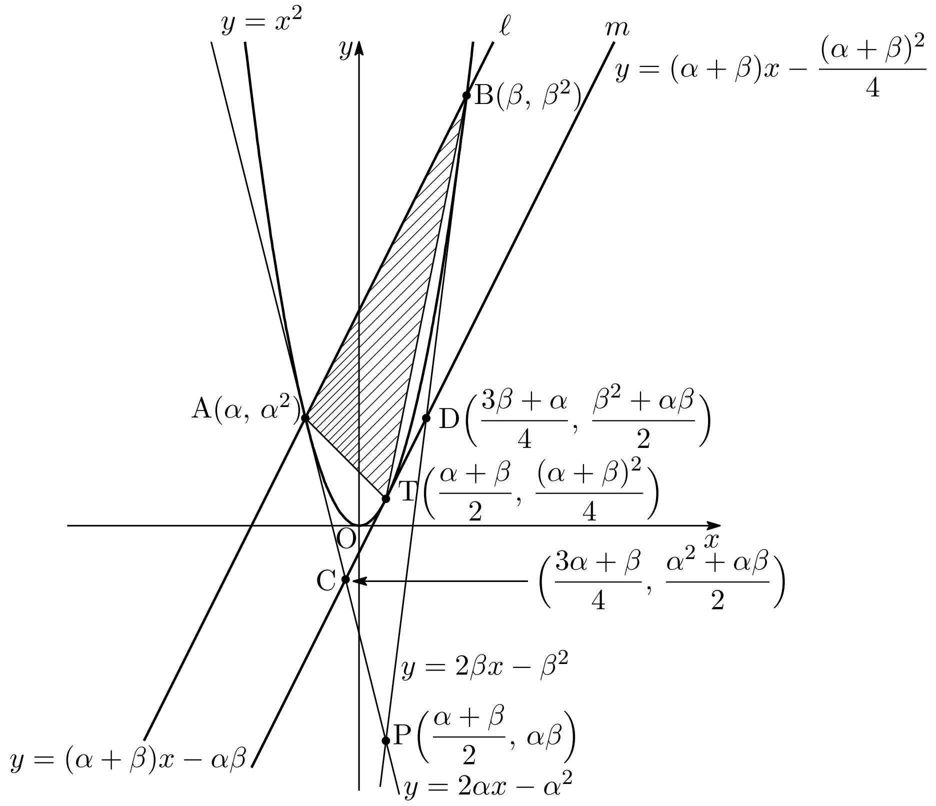
紀元前の天才数学者アルキメデスは直線が放物線と交わってできる囲まれた面積は，その直線が放物線と交わる 2 点とその直線と平行で放物線と接する接点でできる三角形の $\dfrac{4}{3}$ 倍であることを証明しました。ここではアルキメデスと同じ方法ではなく初等数学でこのことを証明していきます。ここでいう初等数学とは積分は使用しないで求めるということです。

そうは言っても積分が最も簡単に面積を求める方法であることにはたぶん異論はないと思うのでとりあえず面積を求めてみましょう。

直線と放物線 $y=x^2$ の交点を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とすると

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)(\alpha-x)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

たったの 1 行で表すことができる。すばらしいし，美しい。さあ，それでは初等数学でこの面積を求めてみましょう。



証明に入る前にこの放物線と交わる直線にはたくさんの性質があることに気づいたので書き留めておきます。

1. 放物線と交わる直線 ℓ と平行で放物線と接する接点 T の x 座標は放物線に交わる直線の交点 A, B の x 座標の中点になる。$\left(\mathrm{T}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}\Big)\right)$

   接点 T においては直線 $y=(\alpha+\beta)x-\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{4}$ と放物線 $y=x^2$ からできる 2 次方程式は重解になるので判別式 $D=0$ から $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ になる。

2. 交点 A, B を接点とする接線の交点 P の x 座標は接点 T の x 座標に等しい。$\left(\mathrm{P}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\Big)\right)$

   直線 AP は $y=2\alpha x-\alpha^2$, BP は $y=2\beta x-\beta^2$ から交点を求めると $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ になります。

3. $\triangle\mathrm{ATB}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{APB}$
   (a) 点 C, D はそれぞれ線分 AP, BP の中点である。
   (b) 点 $\mathrm{AB}=2\mathrm{CD}$
   (c) 点 P と直線 ℓ の距離は接点 T と直線 ℓ の距離の 2 倍である。

3 に関しては 1 つ証明できれば他の項目も証明できたことになります。またすべての放物線は相似なので放物線は $y=x^2$ として考察していきます。

まずは $S_1 = \triangle\mathrm{ATB} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{APB}$ が成り立つことを感じてください。(底辺が共通で高さが 2 倍の関係です。自分は座標で確認しました。)

ここで S_1 を除いた領域から S_2 の面積を求めてみます。2 つにわかれていますが，どちらも接線と放物線は S_1 と同じ位置関係にあります。

$$S_2 = \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ACT} + \triangle\mathrm{TDB})$$

ここで $\ell /\!/ m$ より $\triangle\mathrm{TDB} = \triangle\mathrm{TDA}$

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2}(\triangle\mathrm{ACT} + \triangle\mathrm{ATD})\\ &= \frac{1}{2}\triangle\mathrm{ACD}\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{CD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ より

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_1\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\triangle\mathrm{APB}\right)\\ &= \frac{1}{8}\triangle\mathrm{APB}\end{aligned}$$

よって求める面積は

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = \frac{1}{2}\triangle\mathrm{APB} + \frac{1}{8}\triangle\mathrm{APB} + \frac{1}{32}\triangle\mathrm{APB} + \cdots$$

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\triangle\mathrm{APB}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{2}\triangle\mathrm{APB}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\\ &= \frac{2}{3}\triangle\mathrm{APB}\\ &= \frac{4}{3}\triangle\mathrm{ATB}\end{aligned}$$

アルキメデスの時代は「無限」という考え方はなかったので，無限等比数列の和は使用しませんでした。でもやや難しいけれど高校 2 年程度の数学の力があれば $\dfrac{4}{3}$ 倍は求めることが可能であるということです。

さあ，ようやく以下の 3 点から面積の計算です。

$$\mathrm{A}(\alpha,\,\alpha^2),\ \mathrm{B}(\beta,\,\beta^2),\ \mathrm{T}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\,\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\right)$$

面積は座標 T の分だけ平行移動して面積公式 $S = \dfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ を利用します。

$$\mathrm{A}'\left(\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2},\,\alpha^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\right), \mathrm{B}'\left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2},\,\beta^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4}\right)$$

$$\mathrm{A}'\left(\frac{\alpha-\beta}{2},\,\frac{(\alpha-\beta)(3\alpha+\beta)}{4}\right), \mathrm{B}'\left(\frac{\beta-\alpha}{2},\,\frac{(\beta-\alpha)(3\beta+\alpha)}{4}\right)$$

$$\triangle \mathrm{ATB} = \frac{1}{2}\left|\frac{\beta-\alpha}{2} \times \frac{(\alpha-\beta)(3\alpha+\beta)}{4} - \frac{\alpha-\beta}{2} \times \frac{(\beta-\alpha)(3\beta+\alpha)}{4}\right|$$
$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{16}\left|-(3\alpha+\beta)+(3\beta+\alpha)\right|$$
$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{16}\left|2\beta-2\alpha\right|$$

$\beta > \alpha$ より

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{8}$$
$$S = \frac{(\beta-\alpha)^3}{8} \times \frac{4}{3}$$
$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$$

余談で △ATB の面積を表す式も美しい。
これをすべて図形で証明したなんてアルキメデスは偉大です。でも負けないぞ！