3.4.2　三角関数とチェビシェフ多項式

昨年度から舞台を中学から高校に移して仕事をしている。んで今日のテーマの三角関数。昔は得意だったような…気がする。昨年の 4 月，数学 II の三角関数の教材がスタートの時はビビったビビった。何せ何にも公式が思い出せない。咲いたコスモス，コスモス咲いた？ うる覚えの公式よりも自分で加法定理を導いてしまえ！ って思っても時間がかかることかかること…。ましてや倍角の公式？ 3 倍角？ 何だそりゃ？ 高校数学に触れていなければ忘れるのは当たり前！ なんて思ってもそれはプロとして失格かな？

で、今日の話。簡単に三角関数の公式を覚えることのできる式発見！ 名前は**チェビシェフ多項式**です。スタートは $\cos 2\theta$ からです。

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\\ \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ \cos 4\theta &= \cdots\cdots\end{aligned}$$

この後ずっと続くんだけど，これを読んでいる高校教員の皆さんどうやって覚えています？ 自分は今まではその都度，計算していました。自慢じゃないけど若い時には計算速かったんだ。ほとんどの公式は覚えてなくて，その都度求めていた。でもこの関係が 1 つの漸化式で表せるなんて知らなかった〜。その漸化式とは…

$$\begin{aligned}&T_0(x) = 1\,,\ T_1(x) = x\\ &T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\end{aligned}$$

実際にやってみますね。

$$\begin{aligned}T_1(x) &= x & \cos 1\theta &= \cos\theta\\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 & \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x & \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & \cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

少しは驚きました？ 次は $\sin\theta$ ですよ。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\\ \sin 4\theta &= \cdots\cdots\end{aligned}$$

この漸化式は

$$\begin{aligned}&U_0(x) = 1\,,\ U_1(x) = 2x\\ &U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_1(x) &= 2x & \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} &= 2\cos\theta & \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 & \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} &= 4\cos^2\theta - 1 & \sin 3\theta &= 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\\ & & & & &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x & \frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} &= 8\cos^3\theta - 4\cos\theta & \sin 4\theta &= 8\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin\theta\cos\theta\\ & & & & &= 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta\end{aligned}$$

今じゃ関数電卓の近似値で構わない人がほとんどだと思うけど，理学を志す人は感動して欲しいなぁ〜。まだまだ感動がほしいという方はこちらへどうぞ。チェビシェフ多項式と n 倍角の公式 (`http://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/69/69-3.pdf`)