

### 3.4.2 三角関数とチェビシェフ多項式

昨年度から舞台を中学から高校に移して仕事をしている。んで今日のテーマの三角関数。昔は得意だったような...気がする。昨年の4月, 数学IIの三角関数の教材がスタートの時はビビった。何せ何にも公式が思い出せない。咲いたコスモス, コスモス咲いた? うる覚えの公式よりも自分で加法定理を導いてしまえ! って思っても時間がかかることかかること...。ましてや倍角の公式? 3倍角? 何だそりゃ? 高校数学に触れていなければ忘れるのは当たり前! なんて思ってもそれはプロとして失格かな?

で、今日の話。簡単に三角関数の公式を覚えることのできる式発見! 名前はチェビシェフ多項式です。スタートは  $\cos 2\theta$  からです。

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \cos 4\theta &= \dots\dots\end{aligned}$$

この後ずっと続くんだけど, これを読んでいる高校教員の皆さんどうやって覚えています? 自分は今まではその都度, 計算していました。自慢じゃないけど若い時には計算速かったんだ。ほとんどの公式は覚えてなくて, その都度求めていた。でもこの関係が1つの漸化式で表せるなんて知らなかった~。その漸化式とは...

$$\begin{aligned}T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\end{aligned}$$

実際にやってみますね。

$$\begin{aligned}T_1(x) &= x & \cos 1\theta &= \cos \theta \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 & \cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x & \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 & \cos 4\theta &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1\end{aligned}$$

少しは驚きました? 次は  $\sin\theta$  ですよ。

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ \sin 4\theta &= \dots\dots\end{aligned}$$

この漸化式は

$$\begin{aligned}U_0(x) &= 1, \quad U_1(x) = 2x \\ U_n(x) &= 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_1(x) &= 2x & \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} &= 2\cos\theta & \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1 & \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} &= 4\cos^2\theta - 1 & \sin 3\theta &= 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta \\ & & & & &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x & \frac{\sin 4\theta}{\sin \theta} &= 8\cos^3\theta - 4\cos\theta & \sin 4\theta &= 8\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin\theta\cos\theta \\ & & & & &= 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta\end{aligned}$$

今じゃ関数電卓の近似値で構わない人がほとんどだと思うけど, 理学を志す人は感動して欲しいなあ~。まだまだ感動がほしいという方はこちらへどうぞ。チェビシェフ多項式と  $n$  倍角の公式 ([http://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken\\_tsushin/69/69-3.pdf](http://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/69/69-3.pdf))