4　数学B

4.1　数列

4.1.1　フィボナッチ数列と黄金数

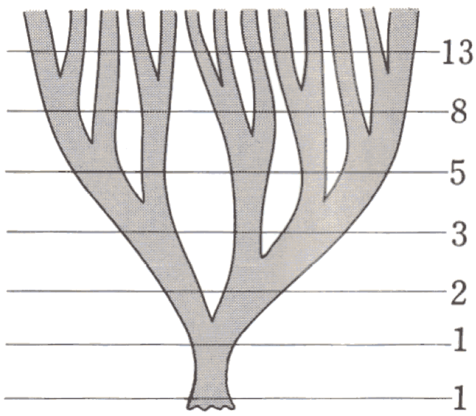
フィボナッチ数列は数ある数列の中でも有名な数列です。といっても知らない人のために復習しましょう。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$$

このような数列です。作り方は単純明快です。$1, 1$ から初めて 2 つの数を加えていくだけです。命名は 13 世紀のイタリアの数学者フィボナッチ (Fibonacci) の名前です。自然界にも多く存在します。一例として花びらの数があります。[1]

枚数	植物名
3枚	ユリ、アヤメ、エンレイソウ
5枚	オダマキ、サクラソウ、キンボウゲ、野バラ、ヒエンソウ
8枚	デルフィニウム、サンギナリア、コスモス
13枚	シネラリア、コーンマリゴールド
21枚	チコリ、オオハンゴンソウ
34枚	オオバコ、ジョチュウギク
55枚	ユウゼンギク
89枚	ミケルマス・デイジー

等です。木の幹の増え方なんかも統計を取るとこの増え方になっています。(下図参照)



この数列の n 番目の一般項 F_n はどんな形なんでしょう？実は 18 世紀にオイラー (1707 − 1783) によって発見されています。

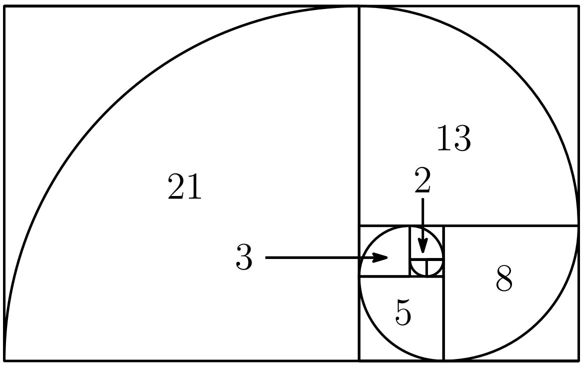
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

ピネの公式というようです。なぜか発見者ではなく発表者ピネ (1786 − 1856) の名前がついています。

[1]「聖なる幾何学」スティーヴン・スキナー著

4.1.1.1　黄金比とフィボナッチ数との関係

黄金比 (Golden ratio) とは $a > b$ のとき $a : b = a + b : a$ を成り立たせる比の値です。黄金比の歴史は古く紀元前にまでさかのぼります。右の長方形の中に示してある数はフィボナッチ数で $1, 1$ の長方形に 2 の長方形を付け加え，次に 3 の長方形をという順に長方形を成長させていった図です。この長方形を成長させていくと，その縦横の比は黄金比になります。余談ですが長方形の中に書いた螺旋は黄金螺旋といいます。



この黄金比は $x^2 - x - 1 = 0$ の正の解で通常 ϕ（ファイ）を使って表します。この値を黄金数ともいいます。一般的には $8 : 5$ の整数比で表すことが多いです。

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \fallingdotseq 1.6180339887\cdots$$

この黄金数 ϕ の特徴の一つに ϕ^2 が $\phi + 1$ で表せる性質があります。

$$\phi^2 = \phi + 1$$

ではこの ϕ の指数を増やしていくとどのように変化していくのでしょう。やってみました。

$$\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi + 1 = (\phi + 1)\phi + 1 = \phi^2 + \phi + 1 = 2\phi + 1$$

このように ϕ^n は ϕ の 1 次式で表せます。

n	$\phi^n = a\phi + b$	a の値	b の値
1	$\phi^1 = \phi$	1	0
2	$\phi^2 = \phi + 1$	1	1
3	$\phi^3 = 2\phi + 1$	2	1
4	$\phi^4 = 3\phi + 2$	3	2
5	$\phi^5 = 5\phi + 3$	5	3
6	$\phi^6 = 8\phi + 5$	8	5
7	$\phi^7 = 13\phi + 8$	13	8
8	$\phi^8 = 21\phi + 13$	21	13
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$	F_n	F_{n-1}

気がつきましたか？ ϕ の係数にフィボナッチ数が登場することを…。全く異なる観点から発展してきた黄金数とフィボナッチ数とに密接な関連があったのです。

4.1.1.2　フィボナッチ数の一般項

数列の教材は現在高校の数B にあります。復習して 1 日挑戦したのですが，今の自分の力では求めることはできませんでした。仕方なくネットを探してヒントをもらいました。

$x^2 = x + 1$ の解を $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする。

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

解と係数の関係より $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$ を使って

$$F_n - \alpha F_{n-1} = \beta(F_{n-1} - \alpha F_{n-2})$$

と変形でき数列 $F_n - \alpha F_{n-1}$ は等比 β の等比数列ということがわかります。

$$F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-2}(F_2 - \alpha F_1) = \beta^{n-2}(1-\alpha) = \beta^{n-1} \cdots ①$$

同様に

$$F_n - \beta F_{n-1} = \alpha^{n-2}(F_2 - \beta F_1) = \alpha^{n-2}(1-\beta) = \alpha^{n-1} \cdots ②$$

①，②より

$$\begin{cases} F_n - \beta F_{n-1} = \alpha^{n-1} \\ F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-1} \end{cases}$$

この 2 式を連立させて F_{n-1} を消去すると

$$(\alpha - \beta)F_n = \alpha^n - \beta^n$$

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$ より

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

ようやくオイラーが求めた数式までたどり着くことができました。自力で式変形できなかった自分の数学の力のなさを埋めようと日々努力する毎日です。

4.1.1.3　余談で…

黄金数を作る数式 $x^2 - x - 1 = 0$ の形の 2 次方程式が気になったのでまとめてみました。

順	2 次方程式	解	特徴
①	$x^2 + x + 1 = 0$	$\omega, -1-\omega$	1 の立方根
②	$x^2 - x - 1 = 0$	$\phi, 1-\phi$	正の解は黄金数 ϕ
③	$x^2 - x + 1 = 0$	$\omega+1, -\omega$	-1 の立方根
④	$x^2 + x - 1 = 0$	$\phi-1, -\phi$	

黄金数の ϕ と 1 の立方根 ω を作る 2 次方程式の数式は似ていますね。改めて感じました。