4.1.2　数学好きは意地悪い？

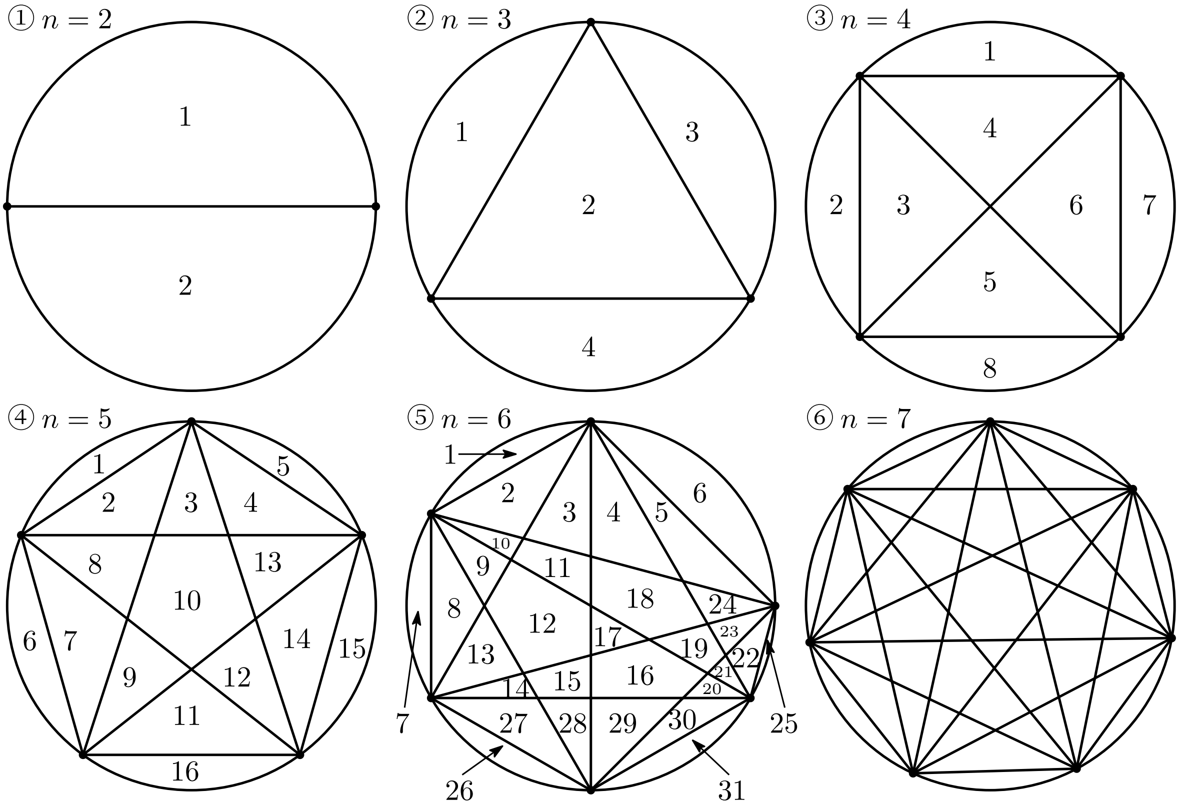
4.1.2.1　NHK「オックスフォード白熱教室」より

ある問題に出会いました。以下のような問題です。

> 問 1. 以下のような数が並んでいます。$\boxed{}$ に入る数はいくつでしょう？
>
> 1 , 2 , 4 , 8 , 16, $\boxed{}$

S :「簡単〜！ 32 です。」
T :「まぁそれも正解だけどもう 1 個あてはまる数があるんだ。」
S :「ええっ〜！」

円周上に点をとって結んでいき，円が何個に分かれていくかを数えていきます。点 1 個のときはまだ分割できません。よって 1 個です。



※正六角形は中央で 3 直線が
　交わるため 1 個少なくなる。

点の数	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	n
分割数	1	2	4	8	16	31	57	99	$\cdots$	$\dfrac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$

(参照 NHK 「オックスフォード白熱教室」 講師 マーカス・デュ・ソートイ)

授業やってみると新鮮な感動をもらいます。「先生，次の 8 個はいくつになるの？」という一言で，「じゃ，やってみようか」ということになりました。周りの生徒はその生徒を恨んでいたようですが…。この数列はパスカルの三角形の左側 5 項の和です。(2022 年 11 月 17 日追記)

求め方は書かなくても大丈夫だとは思うが，自分が忘れやすく，疑り深い正確なのでまとめておきます。

※パスカルの三角形からの求め方

$$\begin{aligned}
a_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_0 + {}_{n-1}\mathrm{C}_1 + {}_{n-1}\mathrm{C}_2 + {}_{n-1}\mathrm{C}_3 + {}_{n-1}\mathrm{C}_4 \\
&= 1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}
\end{aligned}$$

※階差数列を用いた解き方

点の数 (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	n
分割数 (a_n)	1	2	4	8	16	31	57	99	$\cdots$	$\dfrac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$
第 1 階差 (b_n)	1	2	4	8	15	26	42	$\cdots$		$\dfrac{n^3-3n^2+8n}{6}$
第 2 階差 (c_n)		1	2	4	7	11	16	$\cdots$		$\dfrac{n^2-n+2}{2}$
第 3 階差		1	2	3	4	5	$\cdots$			n

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
c_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= 1 + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n^2-n+2}{2}
\end{aligned}$$

$n=1$ のとき成り立つので $c_n = \dfrac{n^2-n+2}{2}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2-k+2}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) \\
&= \frac{n^3-3n^2+8n}{6}
\end{aligned}$$

$n=1$ のとき成り立つので $b_n = \dfrac{n^3-3n^2+8n}{6}$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^3-3k^2+8k}{6}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{6}\cdot\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 - \frac{3}{6}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{8}{6}\cdot\frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}
\end{aligned}$$

$n=1$ のとき成り立つので $a_n = \dfrac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$

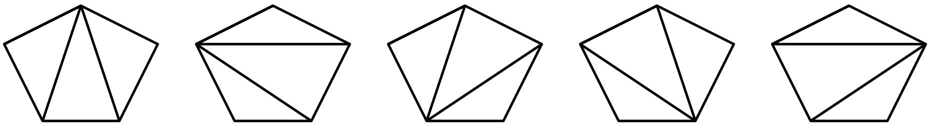
M 教諭から「対角線の交点の個数の数もおもしろいです。」と言われました。「どうして？」と聞いたところ「${}_n\mathrm{C}_4$ で表せるんです。」詳しく聞いたところ，「四角形の対角線の交点は 1 個しかないことから，n 個の頂点から 4 つを選び出すだけでいいんです。」なーるほどと思いました。対角線の交点に関しては四角形は単位元だということを学習しました。

4.1.2.2　カタランの多角形問題

問 2. n 角形を対角線で三角形にわけるわけ方は何通りありますか？ ただし対角線が交差してはいけません。$\boxed{}$ に入る数はいくつでしょう？

n 角形	3	4	5	6	7
分け方	1	2	5	14	

※五角形の場合



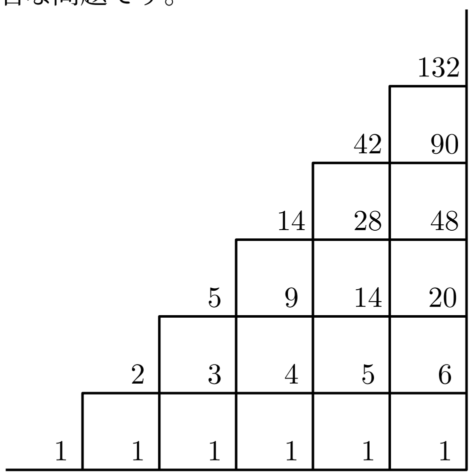
S:「これは… $1,3,9$ と増えているから次は 27 個増えて $14+27$ で 41 です。」
T:「本当にそれでいい？」
S:「ええっ〜？ 書いてみようかな，でも大変そう〜。」

これは「カタランの多角形問題」というかなり有名な問題です。

求め方は右の道の行き方の場合の数を求めることと同じです。パスカルの三角形のようにお互いの和を順次求めていきます。一般項 C_n はコンビネーションを用いた式で表すことができますが初等数学の範囲を超えてしまいます。でもこの方法さえ知っていれば簡単に数項だったら求めることができますね。

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

$$\mathrm{C}_5 = \frac{7\times 8\times 9\times 10}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} = 42$$



4.1.2.3　球を平面で分割する問題

問 3. 球を球の中心を通る平面で切ったとき何個に分けることができますか？ $\boxed{}$ に入る数はいくつでしょう？

n 回	1	2	3	4
分割数	2	4	8	

S:「こんどは大丈夫！ 16 です。」
T:「本当にそれでいい？」
S:「ええっ〜？ ここにリンゴがあるから切ってみようかな〜。」

もうここまで読んだんなら「16 じゃないな。」って思いますよね。その通り正解は 14 です。実験してみたらどうでしょう。ちなみに一般項は $a_n = n^2 - n + 2$ になります。

数学教師はある意味サディスチックですね。自分も否定はしません。

(参考文献：新・高校数学外伝　日本評論社 1982 年)

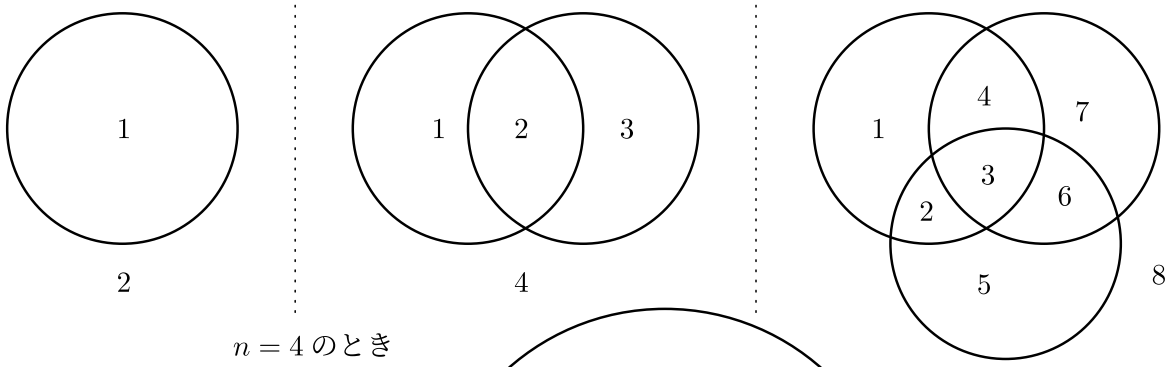
4.1.2.4　平面を円で分割する問題

前と同じ数列ですが以下のような問題もあります。

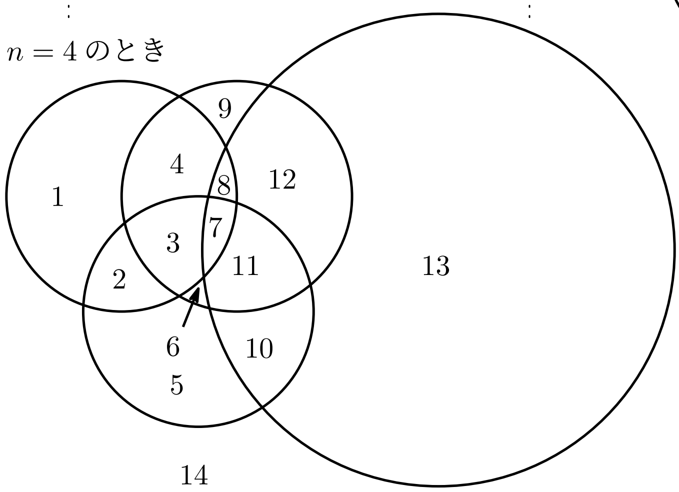
問 4.　平面を円で区切ったとき何個に分けることができますか？ $\boxed{}$ に入る数はいくつでしょう？

n 回	0	1	2	3	4
分割数	1	2	4	8	

$n = 1$ のとき　　$n = 2$ のとき　　$n = 3$ のとき



$n = 4$ のとき



いかがですか？ この問題は数列の漸化式で表すと $n \geqq 1$ のとき $n+1$ 回目の円は $2n$ 個の交点をもつことより

$$\begin{cases} a_0 = 1,\ a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n\ (n \geqq 1) \end{cases}$$

階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$$\begin{cases} b_0 = a_1 - a_0 = 2 - 1 = 1 \\ b_n = a_{n+1} - a_n = 2n\ (n \geqq 1) \end{cases}$$

$n \geqq 1$ のとき $b_k = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2k$ より $a_n = a_0 + \left(b_0 + 2 \cdot \dfrac{(n-1)n}{2}\right) = 1 + (1 + n^2 - n) = n^2 - n + 2$

この数式は $n = 0$ のとき 2 になって成り立ちません。よって表し方は

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = n^2 - n + 2\ (n \geqq 1) \end{cases}$$

階差数列を用いて数列を求めると初項を独立に定義しないと一般式が成り立たない例です。問 3 も 0 回のとき 1 個を付け加えると同じ問題になります。平面の方が考えやすいと思い付け加えました。

(参考文献：数学セミナー 2000 年 1 月号 日本評論社)