5.2　微分法の応用

5.2.1　立体図形の表面積・体積

球の体積公式と表面積の公式をみて「似ているなぁ〜」という想いをもったことはありませんか？ 球の体積公式を r で微分すると表面積の公式が出現するのです。これは偶然ではありません。

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ より}\\
V' &= \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'\\
&= 4\pi r^2\\
&= S
\end{aligned}
$$

5.2.1.1　立方体の表面積・体積

こんなの偶然だろって人のために次は立方体で考えてみましょう。

立方体の場合にはその形状から立方体の内部の中心 (対角線の交点) からの体積公式を考えます。中心から面への距離を a とすると，1 辺の長さは $2a$ になることより $V = (2a)^3 = 8a^3$ になります。ここから話を進めていきましょう。

$$
\begin{aligned}
V &= 8a^3 \text{ より}\\
V' &= (8a^3)'\\
&= 24a^2\\
&= (2a \times 2a) \times 6\\
&= S
\end{aligned}
$$

考え方は微分よりも積分の考え方が自分はしっくりきました。Δa だけ長さが増えたとき増える体積の量は表面積分になっていると感じたからです。(間違っていたらご指摘してください。)

5.2.1.2　円柱の表面積・体積

さぁ次は円柱を考えてみましょう。底面の半径 r で高さが $2r$ です。球を取り囲むような円柱です。$V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$ となります。

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi r^3 \text{ より}\\
V' &= (2\pi r^3)'\\
&= 6\pi r^2\\
&= 2\pi r^2 + 4\pi r^2\\
&= \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times 2r\\
&= S
\end{aligned}
$$

最後の式は (底面積)×2+(側面積) となっています。もちろん円柱の側面積は長方形の (縦)×(横) です。縦は底面の円の円周の長さです。

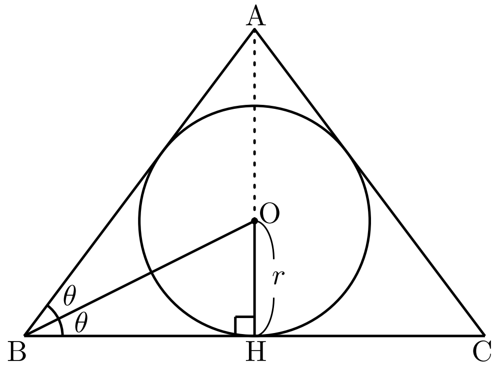
今回の大切なことは立方体の体積を 1 辺を a として $V = a^3$ でもいいのですけど 1 辺を $2a$ とした方が理解がしやすい場合があるということです。形を固定的に捉えてはいけないこと。柔軟に時々に応じて変化しなければいけないことです。年齢を積み重ねると意外に固定観念にとらわれやすくなっている自分に気がつきませんか？

中学生は表面積，体積それぞれの公式を別々に覚えなければなりませんが，学習を積み重ねればそれが 1 つにまとまることが大切です。でも少し頭に来ているのは誰もこんなこと一度も指摘してくれる先生に出会わなかったことが悔やまれます。まっ誰も指摘しないから自分で考えたんだけどね…。

5.2.1.3　円錐の表面積・体積

気になったので，円錐でやってみました。

右の図は内接球に接している円錐の側面の断面図です。この円錐を内接球の半径 r で体積と面積を求めてみましょう。



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ で $\tan\theta = \dfrac{r}{\mathrm{BH}}$ より

$$\mathrm{BH} = \frac{r}{\tan\theta}$$

$\tan 2\theta = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AH} &= \frac{\tan 2\theta}{\tan\theta} r \\ &= \frac{2}{1-\tan^2\theta} r\end{aligned}$$

$\cos 2\theta = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \frac{1}{\cos 2\theta}\cdot\frac{r}{\tan\theta} \\ &= \frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\cdot\frac{r}{\tan\theta} \\ &= \frac{1}{2\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} - 1}\cdot\frac{r}{\tan\theta} \\ &= \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\cdot r\end{aligned}$$

$(\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1)$

$\left(\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$

$\left(1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$

$V = \dfrac{1}{3} \times \pi\mathrm{BH}^2 \times \mathrm{AH}$ より

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\frac{r^2}{\tan^2\theta}\cdot\frac{2}{1-\tan^2\theta} r \\ &= \frac{1}{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

$S = \pi\mathrm{BH}^2 + \mathrm{AB} \times 2\pi\mathrm{BH} \times \dfrac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}S &= \pi\cdot\frac{r^2}{\tan^2\theta} + \frac{1+\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\tan\theta}\cdot r\cdot 2\pi\cdot\frac{r}{\tan\theta}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)}\cdot 2\pi r^2\end{aligned}$$

結果，任意の θ で無事 $V' = S$ を示すことができました。(2019 年 7 月 4 日追記)

5.2.1.4　球が内接する図形の性質

求めた式を眺めていたら $V = \dfrac{1}{3} Sr$ の性質に気づきました。少しネットを調べたら球が内接している図形は円柱，三角柱，四角柱，四角錐等すべての面が球に内接している立体にはこの性質があることをみつけました。(`https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/49/49-9.pdf` 数研出版)

また求めた体積 V を表す式において θ の値によって最小値が求まることに気づき計算したところ $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最小値 $V = \dfrac{8}{3}\pi r^3$ になりました。だいたい $2\theta \fallingdotseq 78.4^\circ$ のときです。自分が忘れないように微分の計算をメモがてら記述しておきます。(2019 年 7 月 17 日追記)

$$V = \frac{1}{\tan^2\theta(1-\tan^2\theta)} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3$$

ここで $\tan\theta = t$，$\dfrac{2}{3}\pi r^3 = C$ とすると

$$V = \frac{C}{t^2 - t^4}$$

$\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と $\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{C}{(t^2-t^4)^2} \cdot (2t - 4t^3)$ より

$$V' = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{C}{(\tan^2\theta - \tan^4\theta)^2} \cdot (2\tan\theta - 4\tan^3\theta) \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$V' = \frac{2(2\tan^2\theta - 1)(1+\tan^2\theta)}{\tan^3\theta(1-\tan^2\theta)^2} \cdot \frac{2}{3}\pi r^3$$

年齢を重ねると計算力が落ちていきます。この微分の計算も同僚の T 教諭にやっていただき答え合わせをしました。ありがとうございました。