

7.3 数学パズル

7.3.1 元気話. 消えたレプリコーン ～アイルランドの民話より～

アイルランドの民話に出てくるレプリコーンという妖精の話をご存じだろうか。下の図1において妖精は15人いる。この上の部分を入れかえたものが図2である。レプリコーンの数を数えると14人しかいない。1人はどこにいったのだろうか？

(なお画像は「新高校数学I 実教出版」より引用しました。)

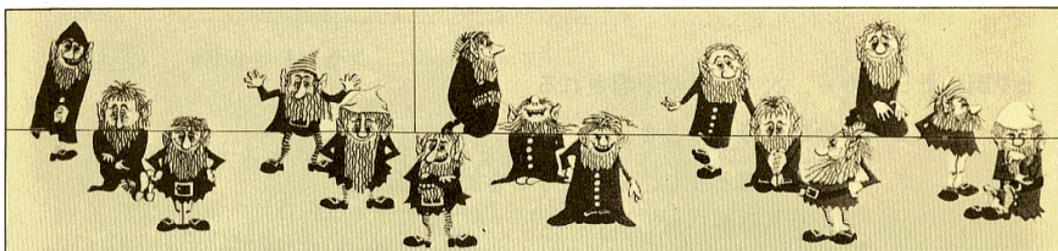


図1 移動前

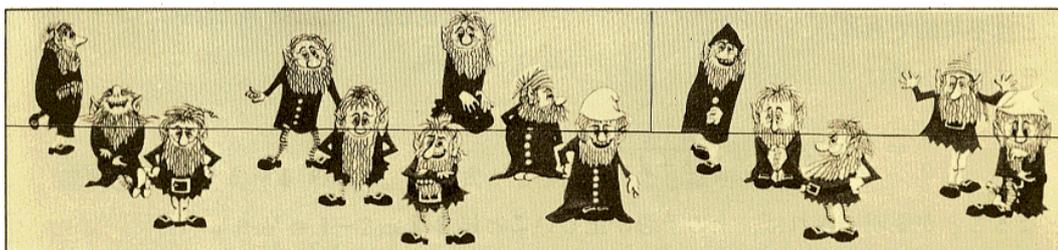


図2 移動後

7.3.1.1 数学セミナー 1988年10月号

どうしてこんなことが起きるのか説明してもいいのですが、数学セミナー1988年10月号の記事に大変詳しい解説があったので載せます。そのまま載せることは著作権法に違反しているのですが、かなり古い記事ですので「参照してください」と言っても手に入らないと思いますのでお許してください。1992年10月号にも数学セミナー創刊30周年記念連続講演会【第2夜】「数理玩具・図・形で遊ぼう」講演者 戸田盛和として同様な記事があります。

消えた小びと

このすぐれたパズルを御覧になったことのある方は数少ないだろう(図1(a))。カナダの1968年の版権が記されていて、『消える小びと』という題名がついている¹⁾。仮りに「小びと」と訳してみたが、LEPRECHAUN(レプリコン)であって、辞典を見るとこれは「アイルランドの民話に出てくる小びとの老人の姿をした妖精(妖魔)で、宝物の隠し場所を教えるとされている」とある。ヨーロッパの神話、伝説、民話、童話には小さな男の妖精がよく登場する。森に住んでいて、いたずらをしたり、人間を助けたり、細工物に巧みだったりする。「7人の小びと」は白雪姫をかくまっ、長いねむりをねむっている姫を守っている、といったぐあいである。日本の民話にも似たようなのがあったようだ。また妖精でなく、狸がいたずらをしたり、人助けをしたりする。図1も妖精のかわりに狸にしたら日本的な画柄になって面白いにちがいない。このような翻案についてはまたあとで考えることにしよう。

さて、図1は厚紙で出来ていて、三つの部分からなる。下半分はひとつづきであるが、上半分は大小の二つの部分にわかれている。そして図1(a)のように左に小さい区分 α をおき、右に大きい区分 β をおいて小びとを数えると15人いる。

次に、上半分の二つをとりかえて、左に大きい区分をおき、右に小さい部分をおくと図2のようになり、小びとを数えると14人になっている。

どのひとりが消えたのだろうか？

(上半分の左右をとりかえれば、ひとりふえて15人になる。どの小びとが、どこからもどってきたのだろうか？)

ふえる紙片

図1と図2を比べて、どの小びとがどこへいったのかと対応関係を考えたりしてみても、どのひとりが消

えたのかというなぞは容易に解決しない。

むしろ逆にどうして14人が15人になるのかと、ふえるなぞを考えた方がよさそうである。というのは、ちょっと似た事柄を思い出すからである。

それは、紙幣(おさつ)をふやす方法である。といっても働いて収入を上げるのではなく、はさみで切った紙幣をつなぎ合わせて数をふやす犯罪である。この犯罪はときおり、忘れた頃に現れるようである。実際にやってみたことはないし、やろうとも思わないが、きくところなどを総合してみると、これはおそらく次のような方法であろうと思われる。

14人か15人の小びとの問題と合わすために、14枚の紙片を15枚にすることを考える。そのために図3(a)のように14枚の紙片を並べて階段状に切断を入れる。そして切断から上の部分の全部を図3(b)のように左へ1列ずつずらして下の部分とつなげるのである。

これによって14枚の紙片は15枚になる！

(上の部分をもとへ戻せば、また14枚に戻る。このプロセスを応用すれば15枚の紙幣を14枚にすることもできるわけであるが、へらしてはニセ札作り(?)はもうからない)。

このように、14枚(図3(a))が15枚(図3(b))になるのは、至極当然でほとんどパズルにもならないほど簡単な事柄である。しかし、小びとがふえたのも、原理的には同じであるといってよいだろう。ただ小びとの妖魔というもともと現実性がない姿を用いたので、ごまかしが目立たないわけである。しかも同時にいくつかのくふうがなされていて、手品のたねがわかりにくくなっているのである。

ものの見方

ふえるわけ、へるわけはすでに述べたのであって、図3の(a)と(b)を比べれば一目瞭然である。図3(a)

THE VANISHING LEPRECHAUN

Arrange the 9 sections (see how) behind the leprechaun. 12, right!

1	2
3	

Disposés les trois sections comme ceci. Comptez les cases. Il y en a trois. 12, vers la droite.

Place arrange the sections (see how) again. 12, right!

2	1
3	

Disposés maintenant les sections comme ceci. Recomptez-les. Ça fait... 3, vers la gauche.

The leprechaun disappears and leaves a trail of gold coins. People are going to dig for the gold and might leave signs of their work. The leprechaun makes it harder by moving the pieces of his body back and forth in the yellow circles. Can you find the missing pieces? Try to find the missing pieces of the leprechaun. Try to find the missing pieces of the leprechaun.

FIRST HINT:
The leprechaun is always in the same place.

SECOND HINT:
Check to see if he has been vanishing.

THIRD HINT:
Ignore the gold coins.

FOURTH HINT:
They're not your friends.

FIFTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

SIXTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

SEVENTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

EIGHTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

NINTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

WHICH ONE VANISHES? WHERE DOES HE GO? WHEN HE COMES BACK, WHERE HAS HE BEEN? WILL ANYONE EVER SOLVE THIS MYSTERY?
LEQUEL DISPARAIT? OÙ PEUT-IL BIEN ALLER? QUAND IL EST DE RETOUR, OÙ A-T-IL BIEN PU ÊTRE? N'Y AURA-T-IL JAMAIS PERSONNE QUI POURRA RÉSOUDRE CETTE ÉNIGME?

1

THE VANISHING LEPRECHAUN

Arrange the 9 sections (see how) behind the leprechaun. 12, right!

1	2
3	

Disposés les trois sections comme ceci. Comptez les cases. Il y en a trois. 12, vers la droite.

Place arrange the sections (see how) again. 12, right!

2	1
3	

Disposés maintenant les sections comme ceci. Recomptez-les. Ça fait... 3, vers la gauche.

The leprechaun disappears and leaves a trail of gold coins. People are going to dig for the gold and might leave signs of their work. The leprechaun makes it harder by moving the pieces of his body back and forth in the yellow circles. Can you find the missing pieces? Try to find the missing pieces of the leprechaun. Try to find the missing pieces of the leprechaun.

FIRST HINT:
The leprechaun is always in the same place.

SECOND HINT:
Check to see if he has been vanishing.

THIRD HINT:
Ignore the gold coins.

FOURTH HINT:
They're not your friends.

FIFTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

SIXTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

SEVENTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

EIGHTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

NINTH HINT:
Check to see if he has been vanishing.

WHICH ONE VANISHES? WHERE DOES HE GO? WHEN HE COMES BACK, WHERE HAS HE BEEN? WILL ANYONE EVER SOLVE THIS MYSTERY?
LEQUEL DISPARAIT? OÙ PEUT-IL BIEN ALLER? QUAND IL EST DE RETOUR, OÙ A-T-IL BIEN PU ÊTRE? N'Y AURA-T-IL JAMAIS PERSONNE QUI POURRA RÉSOUDRE CETTE ÉNIGME?

2

14'

1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'	11'	12'	13'	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

(a)

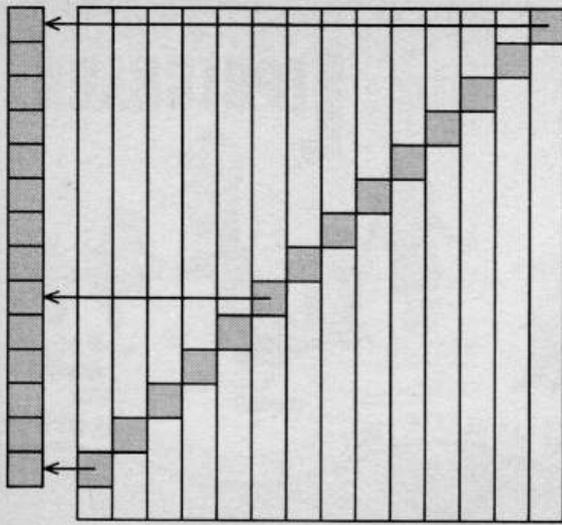
14'

1'	2'	3'	4'	5'	6'	7'	8'	9'	10'	11'	12'	13'	
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

(b)

01234567891011121314

3

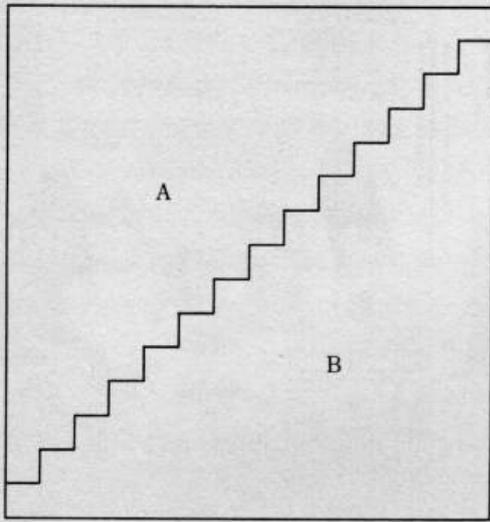


① ② ③ ⑭

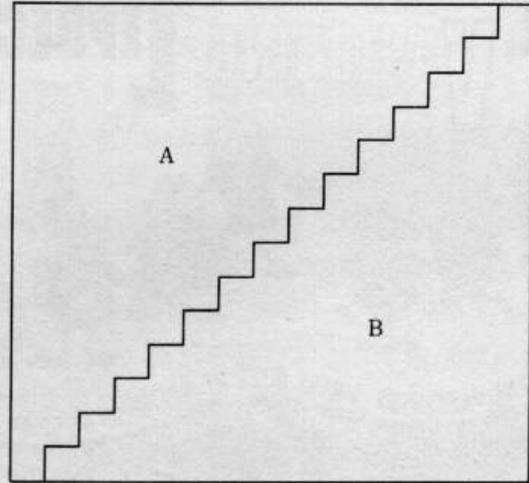
図4

では14本の紙片が図3(b)では15枚になっている、
 そのように「見える」。しかし、どこからか1枚現れて
 紙片の数がふえたわけではない。15枚になった図3
 (b)では、どの紙片も少しずつ「不足」している。上が
 短くなっていたり、中の部分が短くなっていたり、下
 が短くなっていたりしている。それでもまあまあ15
 枚と数えられるのである。

「不足分」にこだわった見方もできる。図3(a)から
 (b)へ移るとき、①では1番下から2番目の部分がな
 くなった紙片であり、②では下から3番目の部分が不
 足した紙片になる。以下同様で、図4には不足する部
 分に影をつけて示した(縦・横の寸法を適宜にとった)。
 この不足分を右端に集めれば一つの紙片になり、これ
 が新たに15番目の紙片①になったと見ることができ



① ② ③ ⑭



① ② ③ ⑭

図5

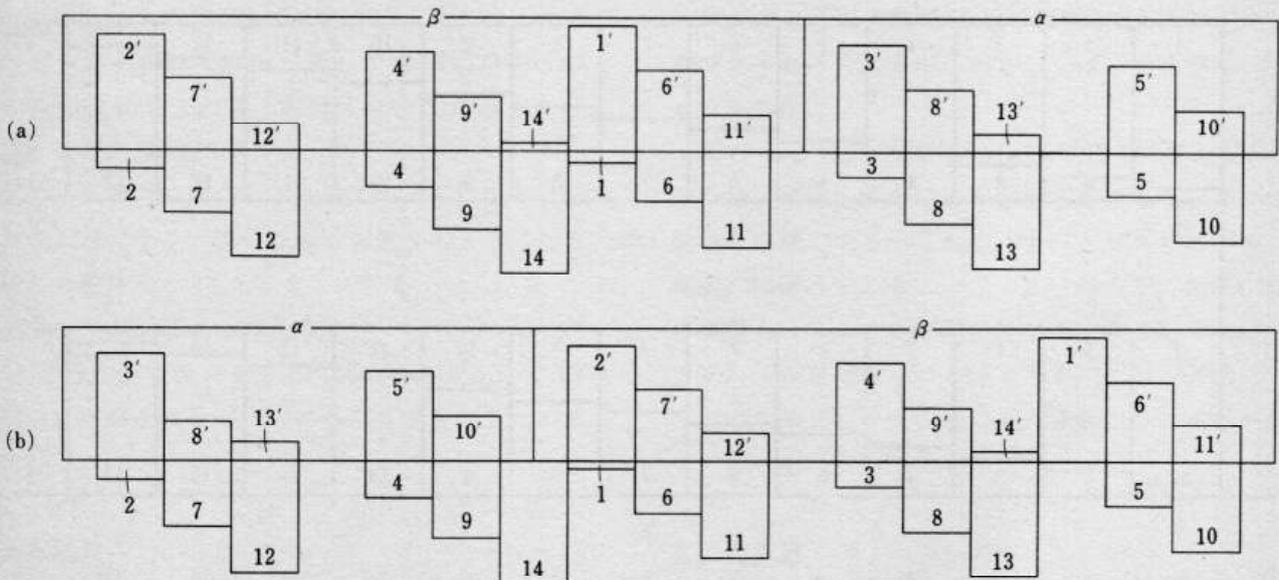
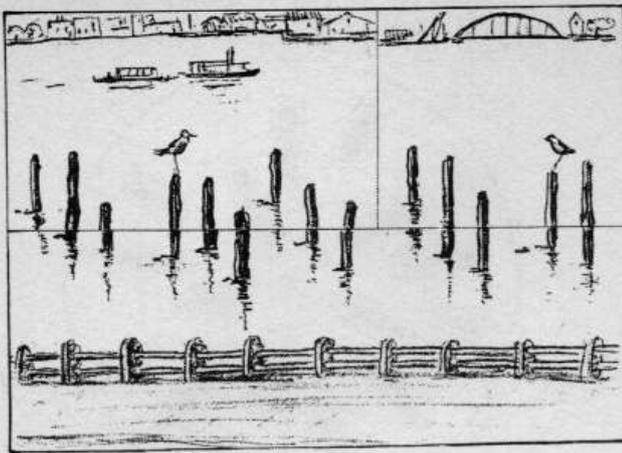
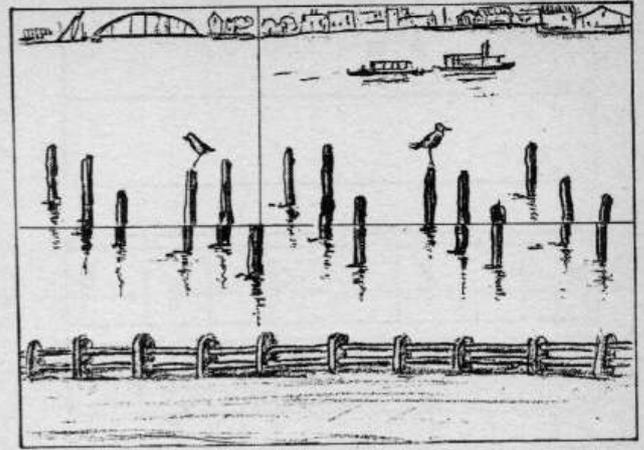


図6



(a)



(b)

図7

るのである。この見方によれば、一つふえた紙片は、その左の14枚の紙片から少しずつつけて作られたことになる(旧約聖書によれば、イブはアダムの肋骨から神様がお作りになったことになっているが、今の場合は14人のアダム①~⑭が $\frac{1}{14}$ ずつ部品を提供して1人のイブ⑯を作ったことになる)。

この見方は多くの人の直観的な理解方法であるらしい。しかし15番目の紙片はその左に並ぶ14の紙片が供出した部分品のつぎはぎとして出現しているわけではない。

別の見方をすれば、紙片が1枚ふえる過程は図3(a)で切断より上の部分(図のA)が左下へと1段ずつ階段状に降りることによって達せられる。これを図5に描いた。こうして1段ずつ降下してから、上の部分が真下の部分とつながってそれぞれ1枚の紙片を構成すると見るので、紙片が1枚ふえたことになる。

これで紙片がふえたり、へったりすることは説明できたでしょう。

複雑化

しかし、紙片がふえたりする図3(a)と(b)の過程は簡単すぎて、小びとがへったりふえたりする図1と図2の過程とは直接結びつかないようにも見えるが、これらは実は同じ過程なのである。ただ図3の過程はあまりにも簡単で手品のネタがはじめてから割れているようなものなので、小びとのパズルにするためにいくらかひねってあるのである。

これを明かにするには、図3(a)の紙片(1, 1')~(14, 14')を図6(a)のように(2, 2')……と並べかえればよい。ついでに切断の線が横一文字になるようにそろえた。図6では紙片の番号が5つおきに並んでい

るが、これは小びとのパズルと合致させることを目標にして何度か試行した後に発見した並べ方である。

このようにして出来る図6(a)は明かに図2(14人の小びと)と同じ形であって、ここで上半分を図のように小さな区分 α と大きな区分 β に分けて、それぞれの区分を図6(b)のように移せば、図1(15人の小びと)と同じ形になる。

まとめていえば、紙片を並べかえた図6(a)は14人の小びとの絵(図2)と同じであり、図6(b)は15人の小びとの絵(図1)と同じである。したがって小びとがふえたり(へったり)するテクニックは、紙幣をふやしたり(へらしたり)するテクニックと同じことが示されたことになる。

小びとのかわりに狸にしてもいいだろうと先きにあったが、もう少し芸術的な絵を描いておこう(図7)。河の中に15本の棒杭が立っていて、向うに船が通っている。この絵の上半分の2つの区分を左右入れかえると、棒杭の数がへって14本になる(図7(b))。

このようにいろいろの絵を考えてみると面白いだまし絵ができるだろう。だますのは先程からちょいちょい話に出てくる狸のしわざかも知れない。そういえば図7の風景は夢の中に出て来る絵そらごとのようでもある。

蛇足と思われることをつけ加えておく。図3や図4と図5では、ふえるところが左端の⑯である。これに対して、図1や図6(b)では右から3番目のところ(図6(b)の1'がふえたところである。このように端でないところをふやすようにすると、図6(a)では12と4の間と11と3の間、および13と5の間にすき間をつくっておかなければならないことになる。このような細工が小びとのパズルをわかりにくくしているのであ

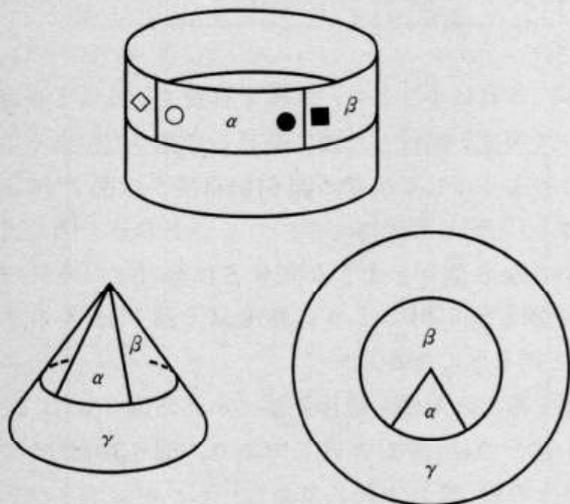
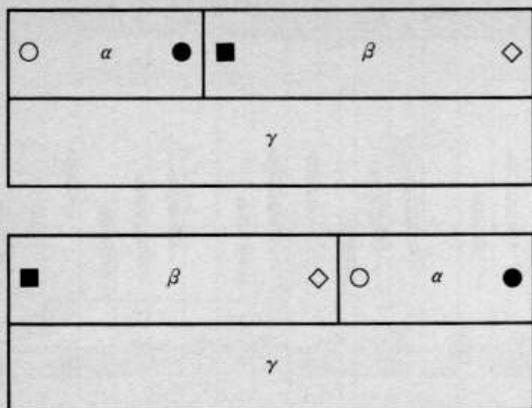


図8

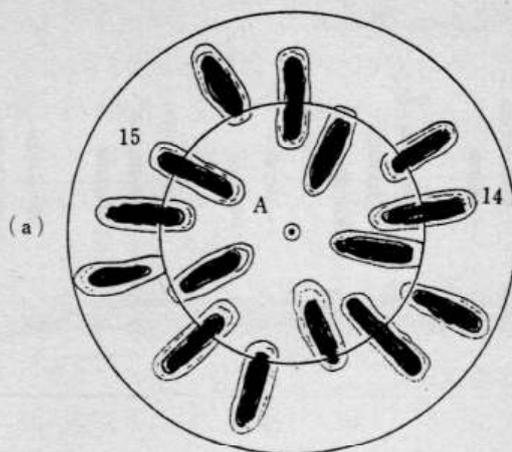
る。

しかし、原理的には図3のようにすると紙片の数が変わるのと同じである。したがって小びとはたがいに関係し合っているのであって、たとえば14人あるいは15人の中の1人だけが別の小びとを全くちがう色をしているということは不可能である、という定理が成立する。

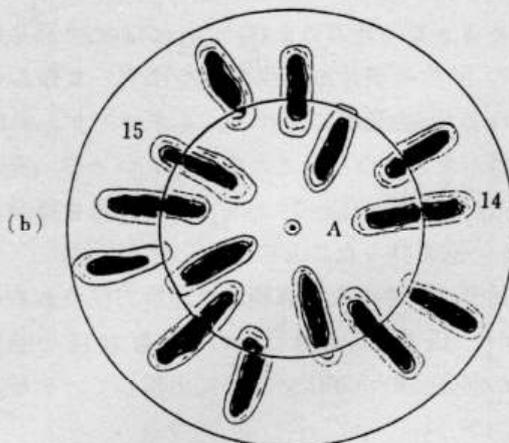
円板状のパズル

小びとのパズルでは上半分の2つの区分を入れかえると1人へったりふえたりした。この操作をくりかえしながら考えている中に、これは周期的な操作に直すことができることに気がついた。

小びとのパズル(図1)では図7のように上の2つの区分 α と β を入れかえる。このとき α と β の端に図のように4つの印○●■◇をつけておくと、 α と β を入れかえても4つの印の順序は変わらないことがわかる。したがって、紙全体の端と端をつないで円筒状にすると(図8)、 α と β を入れかえる操作は、下半分の



(a)



(b)

図9

γ をとめておいて、円筒の上をある角度だけまわすのと同じであることがわかる。

円筒は円錐にすることもできる。さらに平たくして円板にすることもできる。

そこで厚紙で大小二つの円板をつくり、「消える小びと」のかわりに「消えるエクレー」というパズルを作ったことがある²⁾。二つの円板の中心をそろえて、相互に回転できるようにとめ、15個のエクレーを描いた(図9(a))。たしかに15個あることを数えさせておいてから、こっそり中の円板を少し回転する。エクレーはひとつへって14個になってしまった(図9(b))。

また少し回転すれば、エクレーは15個に戻る。エクレーがへったりふえたりするのは、小びとのパズルと全く同じわけである。エクレーでなく、ほかのものにしても同じようなパズルができる。電信柱とか、家とか、いろいろできる。ボルトとナットで作ってみたこともある。

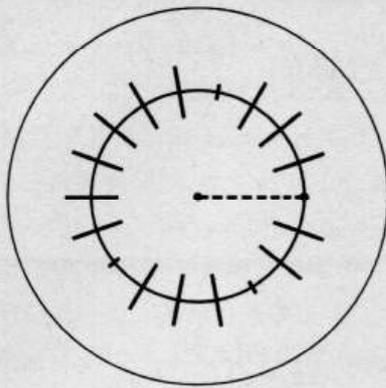
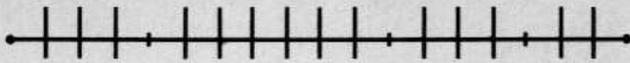


図10

結び

今回の話は、いわゆる起承転結の形になった。話が小びとのパズルから起こされ、これを受けて紙幣の話になり、そこから円板のパズルに転じた。したがって結びをつけなければならない。

図をたくさん使って説明したが、今回のパズルは自分で作って見ないと本当の面白さはわからないだろう(どんなことでもそうであるが)。図3のようにして紙片の数をふやすのは簡単であるから、あらためて作り方を説明するまでもないと思われる(それでも実際にやってみる価値はある)。

小びとのパズルのようなもの(図1や図7)をあてずっぽうに描いて作ろうとすると中々うまくいかないものである。これにはきちんとした「設計」が必要なのである。

図1の原物を調べてみると、厚紙の左から右までの全長は48.6 cmである。小びとは14人か15人であるが、図6で明かなように、途中にすき間があり、両端のところも1つのすき間である。図6の各紙片にそれぞれ小びとが描かれているとすると、図6(a)では14人の小びとと4つのすき間があり、合わせて18の部分がある。全長の48.6 cmを18で割ると、各部分の占める幅は2.7 cmとなる。これは1インチに等しいから、この小びとのパズルはインチを単位として作られている。小びとはいろいろの姿態をしている上に、すき間のところではいくらか不正確な位置をとり得るので、絵は複雑化されているが、図7の棒杭のなどはすき間も入れて正確に等間隔にしなければならない。したがって、図1や図7のような配置のパズルを作ろうと思えば次のようにすればよい。

全長を18等分する線(17本)を引く。そして17本

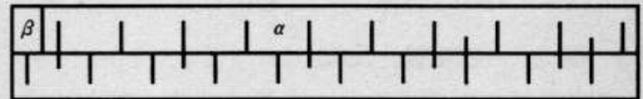
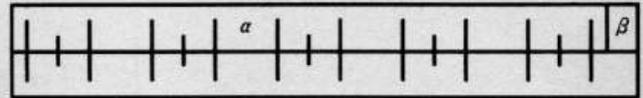


図11

の線の左から4番目と11番目と15番目を除いた14の線の上に、小びとなり棒杭なりを描く。そして図10の区分 α と β を入れかえたときに、小びとなり棒杭なりがうまくつながってちゃんとした絵になるようにくふうすればよいのである。

円板状にする場合には、全周 360° を18等分して、角度 20° ごとに線を引き、同じように絵を描けばよいわけである。

もちろん、小びとや棒杭の数は14、あるいは15に限らない。たとえば7枚の紙片を8枚にすること、7人が8人になるようにすることも可能であり、任意の数が可能である。一つの例として、図11を参考のために示しておこう。これは一つずらすことによって、3つふえることになる。

文献

- 1) THE VANISHING LEPRECHAUN,
W. A. Elliott Co., Toronto, Canada.
Designed by the J. L. Patterson Studis, Toronto,
Canada.
- 2) 『数理科学』1982年1月号 p. 25.

(とだもりかず/放送大学)