2.1.3　クリスマスプレゼント交換会

問. ある学級で全員からプレゼントを集めて，それを再配布してプレゼントを交換するといった企画を立てました。このとき誰も自分のプレゼントにならない確率を求めなさい。ただしどのプレゼントになるかは同様に確からしいとします。

この問題は完全順列 (i 番目が i でない順列) という問題です。分け方は人数を n 人としたとき $n\,!$ 通り。その時，誰も自分のプレゼントにならない場合の数 A を求めると

$A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$

となります。具体的に求めてみましょう。

人数 (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
場合の数 (A)	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961
すべての分け方 $(n\,!)$	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800
確率 $\left(p = \dfrac{A}{n\,!}\right)$	0	0.5	0.333	0.375	0.367	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368

最終的な $n \to \infty$ における確率 p は $p = \dfrac{1}{e} \fallingdotseq 0.367879\cdots$ となります。

意外と高い値になりました。約 63 %の確率で誰かが自分のプレゼントになってしまうんです。ここで出てきた 0 , 1 , 2 , 9 , 44 , 265 , 1854 , 14833 $\cdots$ はモンモール数と呼ばれています。$n = 4$ のときの $p = \dfrac{9}{24}$ に挑戦させるのはどうでしょう？

2.1.3.1　完全順列について

$n = 2$ の場合は以下の場合のみ。
よって $A_2 = 1$ となります。

— 2 — 1

$n = 3$ の場合は 2 通り。
よって $A_3 = 2$ となります。

2 — 3 — 1
3 — 1 — 2

$n = 4$ の場合は以下の 9 通り。

2 — 1 — 4 — 3
2 — 3 — 4 — 1
2 — 4 — 1 — 3
3 — 1 — 4 — 2
3 — 4 — 1 — 2
3 — 4 — 2 — 1
4 — 1 — 2 — 3
4 — 3 — 1 — 2
4 — 3 — 2 — 1

$n = 4$ のときの枝の本数を能率良く数えていきましょう。4 番目に 4 がくることはありませんから，

(i) 4 番目 (n) が 1 で 1 番目が 4 のときは，残りの 2 つの並べ方は A_2 のときの完全順列に等しくなります。

— 4 — 3 — 2 — 1

(ii) 4 番目 (n) が 1 で 1 番目が 4 以外のときは，残りの 2 つの並べ方は 4 を 1 と考えることによって (4 は 1 番目でない場合を考えているので)A_3 のときの完全順列に等しくなります。

2 — 3 — 4 — 1
3 — 4 — 2 — 1

よって 4 番目にくる数は $(n-1)$ 通りあることから，先に求めた漸化式

$A_n = (n-1)(A_{n-1} + A_{n-2})$

が成り立ちます。