

6.2.2 空間図形問題

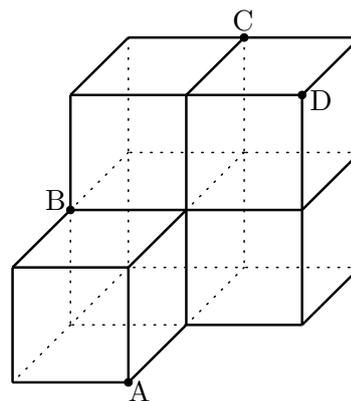
大学入試問題から

問. 座標空間に4点 $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $D(1, 2, 2)$ がある。このとき3点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき, 点 E の座標を求めなさい。

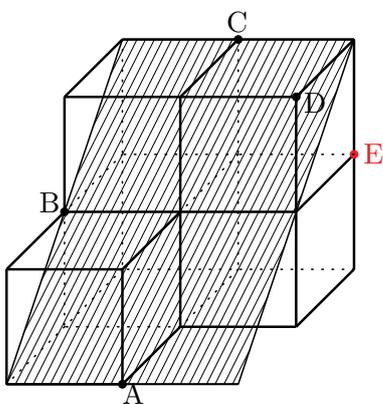
(2006年京都大学文系数学改題)

上の問題を一般用に改めました。

問. 立方体を5つ使って右の図のような形を作りました。このとき3つの頂点 A, B, C を通る平面について, 点 D と対称な点を図に書き入れなさい。



解答は…



これだけで終わってもいいのですが, まあ何かの縁ということで高等数学の代数・幾何で復習がてら解いてみましょう。もっと簡単に解けるのかもしれませんが, まあ答えまでたどり着いたんで…良しとしてください。

3点 A, B, C を通る平面の方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とすると,

$$A(2, 1, 0) \text{ より } 2a + b + d = 0$$

$$B(1, 0, 1) \text{ より } a + c + d = 0$$

$$C(0, 1, 2) \text{ より } b + 2c + d = 0$$

$$\text{これより } a = c = -\frac{1}{2}d, b = 0$$

よって求めている平面の方程式は

$$-\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dz + d = 0$$

$$\text{これより } x + z = 2$$

$$\text{法線ベクトルは } \vec{n} = (1, 0, 1)$$

点 $D(1, 2, 2)$ を通り平面 ABC に垂直に交わる直線の方

$$\text{程式は } \frac{x-1}{1} = \frac{z-2}{1} \text{ より } x = z - 1, y = 2$$

この直線と平面 ABC の交点 M の座標は $(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} \text{よって } \vec{OE} &= \vec{OM} + \vec{ME} \\ &= \vec{OM} + \vec{DM} \\ &= \vec{OM} + \vec{OM} - \vec{OD} \\ &= 2\vec{OM} - \vec{OD} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right) - (1, 2, 2) \\ &= (0, 2, 1) \end{aligned}$$

最後に余談…N教諭大丈夫? 苦労してたけど…な～んて, 実は自分も間違えたんだ。だから悔しくてこんなページを作った。この次作るテストに問題として出題して, 今度は生徒を苦しませてやるんだ! いい性格でしょ?!