6.4　式と曲線

6.4.1　双曲線

高等学校の数 III の 2 次曲線において双曲線の定義は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > 0,\, b > 0)$ になっている。これはこれでいいのだが「これって反比例 $y = \dfrac{a}{x}$ が含まれていないじゃん！」と感じた。教科書にもそれらしき記述はどこにもない。この式から反比例の双曲線は定義できるの？ って感じたのである。

6.4.1.1　直角双曲線

$a = b$ のときにその双曲線の漸近線は直交するとあった。じゃとにかく 1 次変換で漸近線が座標軸になるように回して考えてみよう。ということでやった計算が以下である。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

これより

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x' + y' \\ -x' + y' \end{pmatrix}$$

今の高等学校ではグラフを回転させるには複素平面で考えるしかないので以下の計算も載せておく。

$$z = x + yi$$

45° の回転は $\sqrt{i}$ 倍なので

$$z \times \sqrt{i} = (x + yi) \times \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(x-y) + (x+y)i}{\sqrt{2}}$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y),\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$$

これを $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ に代入すると

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')\right\}^2 - \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')\right\}^2 = a^2$$
$$4x'y' = 2a^2$$
$$y' = \frac{a^2}{2x'}$$
$$y' = \frac{A}{x'}$$

無事反比例の式が出現した。$A = 1$ とすると $\dfrac{a^2}{2} = 1$ より $a = \pm\sqrt{2}$ となって $y = \dfrac{1}{x}$ のときの焦点 F は $\mathrm{F}(\pm\sqrt{2},\, \pm\sqrt{2})$(複号同順) となる。

反比例のもう一つの式 $xy = a$ から漸近線 (座標軸) までの距離の積が等しい点の軌跡でも定義できることを知りました。こっちの式からの式変形はやや難しいけれども，こっちの定義の方が生徒にはわかりやすいんじゃないの？ と感じました。

気になる。x 軸と θ の角度で交わる $y = \tan\theta{\cdot}x$ と $y = -\tan\theta{\cdot}x$ を漸近線として点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ から 2 つの直線への距離の積が一定の a となる双曲線の式を求めてみた。

点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ とすると，この点を通り直線 $y=\tan\theta\cdot x$ に垂直に交わる直線の方程式は

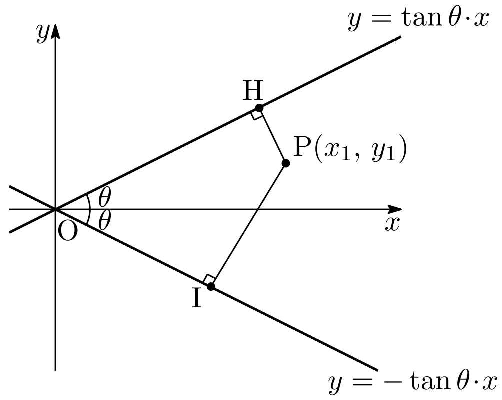
$$y=-\frac{1}{\tan\theta}(x-x_1)+y_1$$

になる。これと直線 $y=\tan\theta\cdot x$ との交点 H の座標は

$\mathrm{H}(\cos^2\theta\cdot x_1+\sin\theta\cos\theta\cdot y_1,\ \sin\theta\cos\theta\cdot x_1+\sin^2\theta\cdot y_1)$

これと直線 $y=-\tan\theta$ との交点 I の座標は

$\mathrm{I}\,(\cos^2\theta\cdot x_1-\sin\theta\cos\theta\cdot y_1,\ -\sin\theta\cos\theta\cdot x_1+\sin^2\theta\cdot y_1)$



点と直線の距離の公式を使えば簡単に求まることはわかっているが，ピタゴラスの定理で長さを求めてみる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{PH}^2 &= (\cos^2\theta\cdot x_1+\sin\theta\cos\theta\cdot y_1-x_1)^2+(\sin\theta\cos\theta\cdot x_1+\sin^2\theta\cdot y_1-y_1)^2\\
&=\{(\cos^2\theta-1)x_1+\sin\theta\cos\theta\cdot y_1\}^2+\{\sin\theta\cos\theta\cdot x_1+(\sin^2\theta-1)\cdot y_1\}^2\\
&=(-\sin^2\theta\cdot x_1+\sin\theta\cos\theta\cdot y_1)^2+(\sin\theta\cos\theta\cdot x_1-\cos^2\theta\cdot y_1)^2\\
&=\sin^2\theta(-\sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot y_1)^2+\cos^2\theta(\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1)^2\\
&=(\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1)^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\\
&=(\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1)^2
\end{aligned}$$

$$\mathrm{PH}=|\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1|$$

この式から，点 P からの垂線の長さ PH は三角形の相似を使って簡単に求めることができることがわかる。

PI は $-\theta$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{PI}&=|-\sin\theta\cdot x_1-\cos\theta\cdot y_1|\\
&=|\sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot y_1|
\end{aligned}$$

$\mathrm{PH}\cdot\mathrm{PI}=a$ より

$$\sin^2\theta\cdot x_1^2-\cos^2\theta\cdot y_1^2=\pm a$$

$x_1=x, y_1=y$ より

$$\sin^2\theta\cdot x^2-\cos^2\theta\cdot y^2=\pm a$$

これより標準形に変形すると

$$\frac{x^2}{\dfrac{a}{\sin^2\theta}}-\frac{y^2}{\dfrac{a}{\cos^2\theta}}=\pm1$$