7.8　球面における円周率

球面での円周率は平面図形とは異なることを知っていますか？

$$(\text{円周率}) = \frac{(\text{円周})}{(\text{直径})}$$

円周率は直径に対する円周の長さの割合です。雑誌 Newton 別冊 数学の世界 図形編 2018 年発行に，球面における円周率は不定でその値は π より小さい値で $0 < (\text{円周率}) < \pi$ とありました。

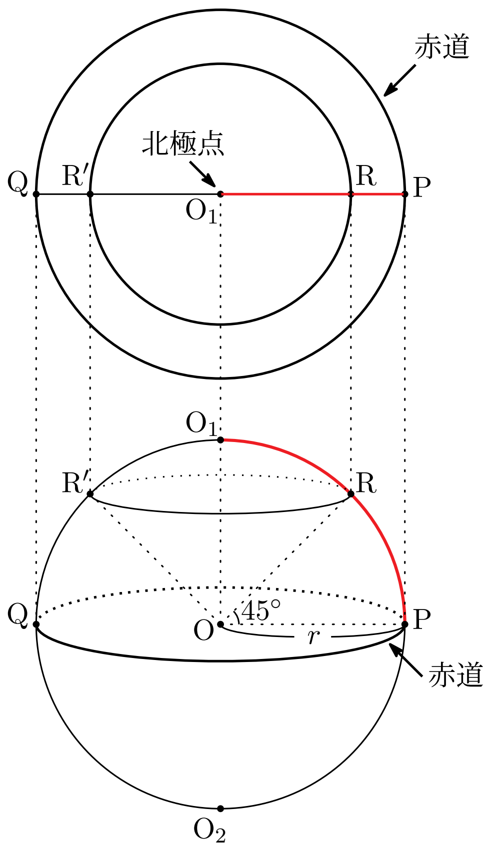
地球を球面として具体例で考察していきましょう。

球面上での直線はすべて球の中心を通る大円で表します。このことに注意してください。赤道の長さ (円周) は地球の半径を r とすると $2\pi r$ です。この円の球面上の中心は北極点 $\mathrm{O_1}$，球面上の半径 は図において赤線で示しましたが $\overset{\frown}{\mathrm{O_1P}}$(大円の一部) の $\dfrac{\pi r}{2}$ で，直径は$\overset{\frown}{\mathrm{PO_1Q}}$ の πr です。したがってこの場合の円周率を計算すると

$$(\text{円周率}) = \frac{2\pi r}{\pi r} = 2$$

よって円周率は 2 になります。

これで終わってもいいのですが，球面における円周率が不定ということを別の点の円周率を求めることで示してみましょう。



問. 右図において点 R を通る円の円周率を求めなさい。

$\angle \mathrm{ROR'} = 90^\circ$ より

$$(\text{円周率}) = \frac{2\pi r \cos 45^\circ}{2\pi r \times \dfrac{90^\circ}{360^\circ}} = 2\sqrt{2}$$

問. 右図において $\mathrm{O_2}$(南極点) を中心とし，点 R を通る円の円周率を求めなさい。

$$(\text{円周率}) = \frac{2\pi r \cos 45^\circ}{2\pi r \times \dfrac{270^\circ}{360^\circ}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

このことより球面においては同じ円に対して異なる 2 つの円周率が存在します。

ここまでやったんだから球面での円周率は一般的にはどうなっているか求めてみましょう。45° を $\theta \left(0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ として一般式を求めると

$$(\text{円周率}) = \frac{2\pi r \cos\theta}{2\pi r \times \dfrac{\pi \mp 2\theta}{2\pi}} = \frac{2\pi \cos\theta}{\pi \mp 2\theta}$$

$\mp$ の $-$ は $\mathrm{O_1}$ を中心としたときで，$+$ は $\mathrm{O_2}$ を中心としたときです。点 R が $\mathrm{O_1}$ に近づくと円周率の値は増加し π の値に近づき，そのとき $\mathrm{O_2}$ を中心とした円周率は減少し 0 に近づいていきます。最後の式は $\theta \to \dfrac{\pi}{2}$ のとき π に収束するんだけど，新たな問題として成立するかなぁ〜。

7.8.1 備忘録

年齢を重ねると忘れることが多くなって，ちょっと前までは解くことができた問題に苦戦することが増えてきたから，この頃はできるだけ詳しくまとめています。今回も次に見たとき「どうしてかなぁ〜。」って感じると思うのでまとめておきます。

問. 次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\theta}{\pi-2\theta}=\pi$$

$$(左辺)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\theta}{\pi-2\theta}$$

$x=\pi-2\theta$ とおくと $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$ は $x\to0$，また $\theta=\dfrac{\pi-x}{2}$ より

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\pi\cos\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)}{x}$$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ より

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\pi\left(-\sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right)}{x}$$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\pi\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x}$$

$$=\pi\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}$$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ より

$$=\pi$$

O_2 を中心とした円周率は $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\pi\cos\theta}{\pi+2\theta}=\frac{2\pi\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{\pi+2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=\frac{2\pi\cdot0}{2\pi}=0$ になります。自分で解いてみてテストの問題として成り立つかもしれないと感じました。

注意. 前頁で考えた点 R を通る円は緯線といいます。緯線は球面上の直線ではないことに注意してください。ただし，緯線の中で唯一赤道だけは大円なので球面上では円でもあり，直線でもある図です。子午線はすべて大円なので直線 (円) です。このことが理解できると球面上には平行線が存在しないことが理解できると思います。