

2.3.7 素数にならない数

ある数を素因数分解したとき、含まれる素因数の中で最も小さい数を**最小素因数** (Smallest prime factor), 最も大きな素因数を**最大素因数** (Largest prime factor) といいます。その数が素数のときは最小素因数と最大素因数は等しくなります。この事を踏まえてお読みください。

2.3.7.1 各位の和が2の数

各位の和が2の素数は現在2, 11, 101の3個みつかり、各位の和が2になる最大の素数は現在101です。これより大きな数で各位の和が2になる数は $10^n + 1 = 100\dots\dots001$ の形の数ですがすべて素数ではありません。ただ素数ではないという証明もされていないようです。

$n = 3$	$1001 = 7 \times 11 \times 13$	$n = 8$	$100000001 = 17 \cdot 5882353$
$n = 4$	$10001 = 73 \times 137$	$n = 9$	$1000000001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579$
$n = 5$	$100001 = 11 \times 9091$	$n = 10$	$10000000001 = 101 \cdot 3541 \cdot 27961$
$n = 6$	$1000001 = 101 \times 9901$	$n = 11$	$100000000001 = 11^2 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779$
$n = 7$	$10000001 = 11 \times 909091$	$n = 12$	$1000000000001 = 73 \cdot 137 \cdot 99990001$

赤字がこの形の最小素因数 (**A038371**) で**青字**が最大素因数 (**A003021**) です。この形の数の最小素因数はかなり限られた素因数が出現しています。7, 11, 17, 73, 101以外の最小素因数は $n = 14$ のときの**29**・101・281・**121499449**です。しかしこの数は101を素因数にもちます。 $n = 16$ のときそれまでにはない新しい素因数353が出現します。

$$10^{16} + 1 = 353 \cdot 449 \cdot 641 \cdot 1409 \cdot 69857$$

2.3.7.2 1から始まる連続整数を昇順に並べた数

1から連続整数を並べた数の素数は現在1つも発見できていません。整数列大辞典からのコメントを読むとこの形の数は素数にはならないという証明はされていないようです。

$$\begin{aligned}12 &= 2^2 \times 3 \\123 &= 3 \times 41 \\1234 &= 2 \times 617 \\12345 &= 3 \times 5 \times 823 \\123456 &= 2^6 \times 3 \times 643 \\1234567 &= 127 \times 9721 \\12345678 &= 2 \times 3^2 \times 47 \times 14593 \\123456789 &= 3^2 \times 3607 \times 3803 \\123\dots1011 &= 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 67 \cdot 107 \cdot 630803 \\123\dots1213 &= 113 \cdot 125693 \cdot 869211457 \\123\dots1617 &= 3^2 \cdot 47 \cdot 4993 \cdot 584538396786764503 \\123\dots1819 &= 13 \cdot 43 \cdot 79 \cdot 281 \cdot 1193 \cdot 833929457045867563\end{aligned}$$

赤字がこの形の最小素因数 (**A075019**) で**青字**が最大素因数 (**A075022**) です。

2.3.7.3 $abb\dots abc$ の形の数

ここでは形の決まった数に素数があるかないかを検証していきます。 a, b を 1 桁の数, ただし $a \neq 0, c = 1, 3, 7, 9$ という条件で $abb\dots abc$ という 3 桁以上の数を作り素数があるかないかを調べていきます。断っておきますがあくまでも自分の計算結果が元となっています。整数列大辞典と比べましたが, 整数列大辞典もまだまだ発展途上らしく全てを網羅していませんでした。ただ明らかに素数でない形 $200\dots 001$ や $999\dots 999$ 等の 3 の倍数は除外しました。

- | | | | | | | |
|------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| (1) | 3 の倍数 | (略) | | | | |
| (2) | 7 の倍数 | 466.....669 | 622.....223 | 700.....007 | 777.....777 | 933.....331 |
| (3) | 11 の倍数 | 122.....221 | 733.....337 | 977.....779 | | |
| (4) | 13 の倍数 | 144.....443 | | | | |
| (5) | 17 の倍数 | 188.....887 | | | | |
| (6) | 23 の倍数 | 255.....553 | | | | |
| (7) | 31 の倍数 | 344.....441 | | | | |
| (8) | 41 の倍数 | 455.....551 | | | | |
| (9) | 43 の倍数 | 477.....773 | | | | |
| (10) | 53 の倍数 | 588.....883 | | | | |
| (11) | 61 の倍数 | 677.....771 | | | | |
| (12) | 71 の倍数 | 788.....881 | | | | |
| (13) | 素数なし | 533.....339 | 711.....117 | 911.....113 | 944.....449 | 955.....559 |

ここに書かなかった数のパターンには素数がありました。(次頁参照)赤字の数字は全て $m \times 111 \dots 111$ の形の数で簡単に素数にならないことが説明できる数です。その他の数はその数の倍数の見分け方から説明できそうです。素数がなかった数では $911\dots 113$ と $944\dots 449$ と $955 \dots 559$ の最小素因数は 3, 7, 11, 13 の 4 つが必ず出現したのでこれも説明できそうです。533 $\dots 339$ と $711\dots 117$ の形は必ず合成数になるという説明はできそうにありません。読者の皆さんの挑戦に任せます。

計算の精度を書きおくとこの過程でみつかった最大の素数は $344\dots 447$ の形で 4 が 757 個並んだ 759 桁の素数でした。

自分は U-Basic を用いた自作のプログラムで調べましたが, 時代遅れのソフトなので今の人たちは動かすのも大変だと思います。そこで大きな数を素因数分解してくれるサイトを紹介しておきます。<https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM> です。表記は英語ですが数を入力して をクリックすれば素因数分解してくれます。高速でかなり大きな桁まで大丈夫です。

2.3.7.4 221 の性質

「数学のたのしみ No.14」に合成数 221 が素数を使った式で表してありました。

$$221 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 + 11 = 13 \times 17$$

2.3.7.5 $abb\dots abc$ の形 (101 ~ 399) の素数

a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典
1	0	1	101	2	0	1	(3 の倍数)	3	0	1	A101823
1	0	3	A102006	2	0	3	A101951	3	0	3	(3 の倍数)
1	0	7	A102007	2	0	7	(9 の倍数)	3	0	7	A101824
1	0	9	A102008	2	0	9	A101952	3	0	9	(3 の倍数)
1	1	1	A004022	2	1	1	A068814	3	1	1	A068813
1	1	3	A093011	2	1	3	A101953	3	1	3	A056251
1	1	7	A093139	2	1	7	A101954	3	1	7	A101826
1	1	9	A055558	2	1	9	A101955	3	1	9	A101827
1	2	1	(11 の倍数)	2	2	1	A091189	3	2	1	A101828
1	2	3	A102009	2	2	3	A093162	3	2	3	A056252
1	2	7	A102010	2	2	7	A093167	3	2	7	A101830
1	2	9	A102011	2	2	9	A093401	3	2	9	A101831
1	3	1	A056244	2	3	1	(3 の倍数)	3	3	1	A123568
1	3	3	A093671	2	3	3	A093672	3	3	3	(3 の倍数)
1	3	7	A102013	2	3	7	(3 の倍数)	3	3	7	A093168
1	3	9	A102014	2	3	9	A101956	3	3	9	(3 の倍数)
1	4	1	A056245	2	4	1	A101957	3	4	1	(31 の倍数)
1	4	3	(13 の倍数)	2	4	3	A101958	3	4	3	A056253
1	4	7	A102016	2	4	7	A101959	3	4	7	A101833
1	4	9	A102017	2	4	9	A101960	3	4	9	A101834
1	5	1	A056246	2	5	1	A101961	3	5	1	A101835
1	5	3	A102019	2	5	3	(23 の倍数)	3	5	3	A056254
1	5	7	A102020	2	5	7	A101962	3	5	7	A101837
1	5	9	A102021	2	5	9	A101963	3	5	9	A101838
1	6	1	A056247	2	6	1	(3 の倍数)	3	6	1	A101839
1	6	3	A102023	2	6	3	A101964	3	6	3	(3 の倍数)
1	6	7	A102024	2	6	7	(3 の倍数)	3	6	7	A101840
1	6	9	A102025	2	6	9	A101965	3	6	9	(3 の倍数)
1	7	1	A056248	2	7	1	A101966	3	7	1	A101841
1	7	3	A102027	2	7	3	A101967	3	7	3	A056255
1	7	7	A088465	2	7	7	A093938	3	7	7	A093939
1	7	9	A102028	2	7	9	A101968	3	7	9	A101843
1	8	1	A056249	2	8	1	A101969	3	8	1	A101844
1	8	3	A102030	2	8	3	A101970	3	8	3	A056256
1	8	7	(17 の倍数)	2	8	7	A101971	3	8	7	A101846
1	8	9	A102031	2	8	9	A101972	3	8	9	A101847
1	9	1	A056250	2	9	1	(3 の倍数)	3	9	1	A101848
1	9	3	A102033	2	9	3	A101973	3	9	3	(3 の倍数)
1	9	7	A102034	2	9	7	(9 の倍数)	3	9	7	A101849
1	9	9	A055558	2	9	9	A055559	3	9	9	(3 の倍数)

2.3.7.6 $abb\dots abc$ の形 (401 ~ 699) の素数

a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典
4	0	1	A101712	5	0	1	(3の倍数)	6	0	1	A101517
4	0	3	A101713	5	0	3	A101568	6	0	3	(9の倍数)
4	0	7	A101714	5	0	7	(3の倍数)	6	0	7	A101518
4	0	9	A101715	5	0	9	A101569	6	0	9	(3の倍数)
4	1	1	A068815	5	1	1	A068816	6	1	1	A093631
4	1	3	A101716	5	1	3	A101570	6	1	3	A101519
4	1	7	A101717	5	1	7	A101571	6	1	7	A101520
4	1	9	A101718	5	1	9	A101572	6	1	9	A101521
4	2	1	A101719	5	2	1	A101573	6	2	1	A101522
4	2	3	A101720	5	2	3	A101574	6	2	3	(7の倍数)
4	2	7	A101721	5	2	7	A101575	6	2	7	A101523
4	2	9	A101722	5	2	9	A101576	6	2	9	A101524
4	3	1	A101723	5	3	1	(3の倍数)	6	3	1	A101525
4	3	3	A093673	5	3	3	A093674	6	3	3	(3の倍数)
4	3	7	A101724	5	3	7	(3の倍数)	6	3	7	A101526
4	3	9	A101725	5	3	9	\emptyset	6	3	9	(3の倍数)
4	4	1	A093174	5	4	1	A101578	6	4	1	A101527
4	4	3	A093163	5	4	3	A101579	6	4	3	A101528
4	4	7	A092480	5	4	7	A101580	6	4	7	A101529
4	4	9	A093402	5	4	9	A101581	6	4	9	A101530
4	5	1	(41の倍数)	5	5	1	A056684	6	5	1	A101531
4	5	3	A101726	5	5	3	A093164	6	5	3	A101532
4	5	7	A101727	5	5	7	A093169	6	5	7	A101533
4	5	9	A101728	5	5	9	A093403	6	5	9	A101534
4	6	1	A101729	5	6	1	(3の倍数)	6	6	1	A092571
4	6	3	A101730	5	6	3	A101582	6	6	3	(3の倍数)
4	6	7	A101731	5	6	7	(3の倍数)	6	6	7	A093170
4	6	9	(7の倍数)	5	6	9	A101583	6	6	9	(3の倍数)
4	7	1	A101732	5	7	1	A101584	6	7	1	(61の倍数)
4	7	3	(43の倍数)	5	7	3	A101585	6	7	3	A101535
4	7	7	A093940	5	7	7	A093941	6	7	7	A093942
4	7	9	A101733	5	7	9	A101586	6	7	9	A101536
4	8	1	A101734	5	8	1	A101587	6	8	1	A101537
4	8	3	A101735	5	8	3	(53の倍数)	6	8	3	A101538
4	8	7	A101736	5	8	7	A101588	6	8	7	A101539
4	8	9	A101737	5	8	9	A101589	6	8	9	A101540
4	9	1	A101738	5	9	1	(3の倍数)	6	9	1	A101541
4	9	3	A101739	5	9	3	A101590	6	9	3	(9の倍数)
4	9	7	A101740	5	9	7	(3の倍数)	6	9	7	A101542
4	9	9	A093945	5	9	9	A093946	6	9	9	(3の倍数)

2.3.7.7 $abb\dots abc$ の形 (701 ~ 999) の素数

a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典	a	b	c	整数列大辞典
7	0	1	A101128	8	0	1	(9の倍数)	9	0	1	A100997
7	0	3	A101129	8	0	3	A101056	9	0	3	(3の倍数)
7	0	7	(7の倍数)	8	0	7	(3の倍数)	9	0	7	A100998
7	0	9	A101130	8	0	9	A101057	9	0	9	(9の倍数)
7	1	1	A093632	8	1	1	A093633	9	1	1	A093634
7	1	3	A101131	8	1	3	A101058	9	1	3	∅
7	1	7	∅	8	1	7	A101059	9	1	7	A100999
7	1	9	A101132	8	1	9	A101060	9	1	9	A056264
7	2	1	A101133	8	2	1	A101061	9	2	1	A101001
7	2	3	A101134	8	2	3	A101062	9	2	3	A101002
7	2	7	A056257	8	2	7	A101063	9	2	7	A101003
7	2	9	A101136	8	2	9	A101064	9	2	9	A056265
7	3	1	A101137	8	3	1	(3の倍数)	9	3	1	(7の倍数)
7	3	3	A093675	8	3	3	A093676	9	3	3	(3の倍数)
7	3	7	(11の倍数)	8	3	7	(3の倍数)	9	3	7	A101005
7	3	9	A101138	8	3	9	A101065	9	3	9	(3の倍数)
7	4	1	A101139	8	4	1	A101066	9	4	1	A101006
7	4	3	A101140	8	4	3	A101067	9	4	3	A101007
7	4	7	A056258	8	4	7	A101068	9	4	7	A101008
7	4	9	A101142	8	4	9	A101069	9	4	9	∅
7	5	1	A101143	8	5	1	A101070	9	5	1	A101009
7	5	3	A101144	8	5	3	A101071	9	5	3	A101010
7	5	7	A056259	8	5	7	A101072	9	5	7	A101011
7	5	9	A101146	8	5	9	A101073	9	5	9	∅
7	6	1	A101147	8	6	1	(3の倍数)	9	6	1	A101012
7	6	3	A101148	8	6	3	A101074	9	6	3	(3の倍数)
7	6	7	A056260	8	6	7	(3の倍数)	9	6	7	A101013
7	6	9	A101150	8	6	9	A101075	9	6	9	(3の倍数)
7	7	1	A093176	8	7	1	A101076	9	7	1	A101014
7	7	3	A093165	8	7	3	A101077	9	7	3	A101015
7	7	7	(7の倍数)	8	7	7	A093943	9	7	7	A093944
7	7	9	A093404	8	7	9	A101078	9	7	9	(11の倍数)
7	8	1	(71の倍数)	8	8	1	A092675	9	8	1	A101016
7	8	3	A101151	8	8	3	A093166	9	8	3	A101017
7	8	7	A056262	8	8	7	A093171	9	8	7	A101018
7	8	9	A101153	8	8	9	A093405	9	8	9	A056266
7	9	1	A101154	8	9	1	(3の倍数)	9	9	1	A093177
7	9	3	A101155	8	9	3	A101079	9	9	3	(3の倍数)
7	9	7	A056263	8	9	7	(3の倍数)	9	9	7	A093172
7	9	9	A093947	8	9	9	A093948	9	9	9	(9の倍数)

2.3.7.8 n から始まる連続整数を昇順に並べた素数

1 から始まる連続整数を並べた数の素数は現在発見できていないと書きましたが、それ以外の数をスタートとする連続整数を並べた数は素数になる数があります。

n	<i>prime</i>	桁数	整数列大辞典
1	I could't find out.		
2	23	2	A089987
3	345678910111213141516171819	27	A140793
4	4567	4	
5	567891011121314151617	21	A128887
6	67	2	A140793
7	78910111213	11	
8	89	2	
9	9101112.....185186187	445	A341715
10	I could't find out.		
11	111213.....307308309	808	
12	1213	4	
13	I could't find out. (13 is prime.)		
14	14151617	8	
15	1516171819	10	
16	161718.....414243	56	A341715
17	171819.....373839	46	
18	I could't find out.		
19	I could't find out. (19 is prime.)		
20	20212223	8	

整数列大辞典では9から始まる連続素数でさえ2021年に書き込まれました。自分がみつけた11からの連続素数はまだどこにも登録されていないようです。(英語のできる方登録してください。)

2.3.7.9 n から始まる連続整数を降順に並べた素数

n	<i>prime</i>	桁数
1	828180.....321	155
3	43	2
7	10987	5
9	109	3
11	686766.....131211	116
13	25242322212019181716151413	26
17	484746.....191817	64

2.3.7.10 基本定数の数字列からなる素数

n	<i>prime</i>	桁数	整数列大辞典
$\sqrt{2}$	141.....073	55	A115453
$\sqrt{3}$	173	3	A119343
$\sqrt{5}$	223	3	A242835
$\sqrt{10}$	316277	6	A136582
π	314159	6	A005042
e	271	3	A007512
φ	1618033	7	A064117

(ただし *prime* は3桁以上)