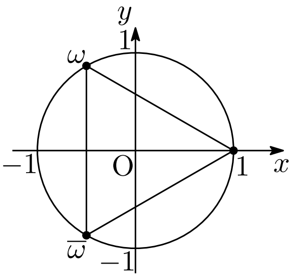
6.3　複素数平面

ここでは数学 II で扱った高次方程式の解が複素数平面上でどう表されるかを中心に考えていく。数学 C の指導のとき数学 II の復習として扱えると感じている。

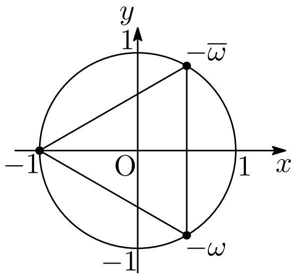
6.3.1　複素数平面と方程式の解

まずある複素数 z が $|z|=1$ を満たすとき，言い換えれば複素数 z が原点 O を中心とする単位円周上にあるとき，その複素数 z の平方根は z の偏角 θ を $\dfrac{1}{2}$ した数に等しい。ただし偏角が正負の 2 つを取ることができるので，求める平方根の値は 2 つある。図を見ると方程式と解の関係が一目瞭然である。x の次数だけ偏角を倍すれば $+1$ あるいは -1 にたどり着く，例えば $x^3-1=0$ の解の偏角は $\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi \to 0\times 3=0,\ \dfrac{2}{3}\pi\times 3=2\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi\times 3=4\pi$ という具合である。

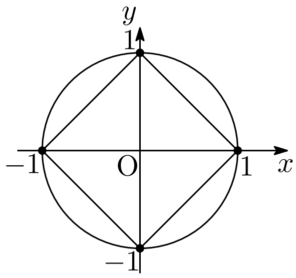
(1) $x^3-1=0$



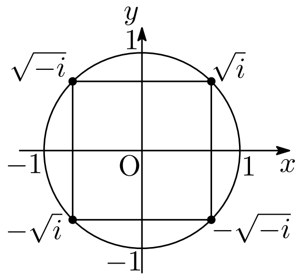
(2) $x^3+1=0$



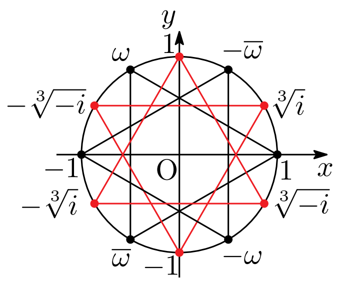
(3) $x^4-1=0$



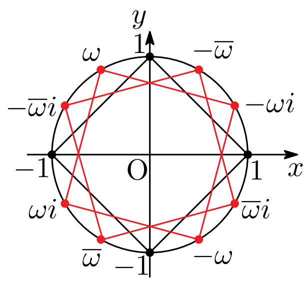
(4) $x^4+1=0$



(5) $x^3\pm 1=0$, $x^3\pm i=0$



(6) $x^4-1=0$, $x^4-\omega=0$, $x^4-\overline{\omega}=0$



(5) と (6) は方程式と解の形を表すために書いた。3 次方程式の 3 つの解の関係は複素数平面上で表すと三角形になること，4 次方程式の 4 つの解の関係は複素数平面上で表すと四角形になることを伝えれば方程式への理解が深まると感じたからである。

念のため書いておくが，教科書で扱っているド・モアブルの定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ は n が整数と定義されていて，実数の場合に言及していない。これは例えば $n=\dfrac{1}{2}$ とすると複数の値が求まるためである。

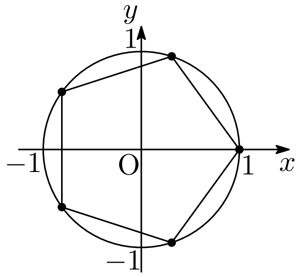
$|z|=1$ を満たす複素数 z において平方数を求めるということはその偏角を倍にすることと同値であるし，平方根を求めるということは異なる 2 つの数が求まるが，どちらも偏角を $\dfrac{1}{2}$ にすることに他ならない。

余談で上の図において $\sqrt{\omega}=-\overline{\omega}$ である。また $x^{12}-1=0$ または $x^6+1=0$ を解くと ωi (ω を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した数) という数が出現したのには驚いた。数の世界は奥が深い。

6.3.1.1 $x^5 - 1 = 0$ と正五角形

少し発展させよう，一般の 5 次以上の方程式は解の公式をもたないため，因数分解できるかが方程式を解くための基準になる。

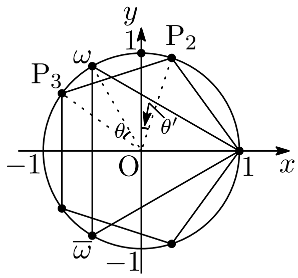
$$x^5 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$
$$\varphi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ より } (x-1)(x^2+\varphi x+1)(x^2+(1-\varphi)x+1) = 0 \cdots\cdots ①$$
$$x = 1,\ \frac{-\varphi \pm \sqrt{\varphi^2-4}}{2},\ \frac{-(1-\varphi) \pm \sqrt{(1-\varphi)^2-4}}{2}$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ より} \qquad x = 1,\ \frac{-\varphi \pm \sqrt{\varphi-3}}{2},\ \frac{-1+\varphi \pm \sqrt{-\varphi-2}}{2}$$



①の式は $x^4+x^3+x^2+x+1 = x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} = \left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1$ と変形し $X = x+\dfrac{1}{x}$ とおき，$x^2+\dfrac{1}{x^2} = X^2-2$ より求めることが可能になる。

6.3.1.2 正三角形と正五角形

ここでコーヒーブレイク。今まで考察してきたことを確認したい。正三角形と正五角形を同じ複素数平面上に書いてみよう。正三角形の 1 つの頂点である ω の偏角は $120°$，正五角形の $(1,0)$ からの左回りの 3 つめの頂点 P_3 の偏角は $360° \div 5 \times 2 = 144°$，その差 $24°$ は $360° \div 24° = 15$ になり，正十五角形の中心角 θ になっている。正十五角形を書くことはないと思うが，この 2 点をコンパスでとれば正十五角形が作図できる。また 2 つめの頂点 P_2 の偏角は $360° \div 5 = 72°$ より虚数軸との中心角は $18°$ でこれは正二十角形の中心角 θ' になっている。



6.3.1.3 偏角を用いた因数分解

ここで 3 次方程式 $x^3-1=0$ をオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて因数分解してみよう。

$$x^3 - 1 = 0$$
$$\left(x - e^{i\cdot 2\pi\frac{0}{3}}\right)\left(x - e^{i\cdot 2\pi\frac{1}{3}}\right)\left(x - e^{i\cdot 2\pi\frac{2}{3}}\right) = 0$$
$$\Big(x-1\Big)\left(x - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - e^{\frac{4\pi}{3}i}\right) = 0 \cdots\cdots ②$$
$$\Big(x-1\Big)\left(x - \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(x - \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 0$$
$$\Big(x-1\Big)\left(x - \tfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x - \tfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$$
$$(x-1)(x-\omega)(x-\overline{\omega}) = 0$$

②は解ごとに独立させたが，単位円周上の実数軸に関して対称な 2 つの解は $x^2 - 2\cos\theta\cdot x + 1 = 0$ で表される。また①とこのことを組み合わせると $\varphi = -2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -2\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ が成り立つ。正六角形，正七角形ともう少し書き進めたいが，この続きは高校数学外伝 VIII「どうして正七角形は作図できないの？」をお読みください。