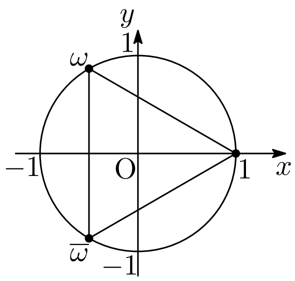
6.3.2　ω を単位元とする世界

ω を単位元とする世界を知っていますか？ 万華鏡の世界といった方が伝わりやすいかもしれません。数学的にいうと 60° の世界です。ではご紹介しましょう。

6.3.2.1　ω とは？

本題に入る前に ω について復習しましょう。ω とは $x^3-1=0$ を満たす 2 つある複素数解の 1 つのことです。

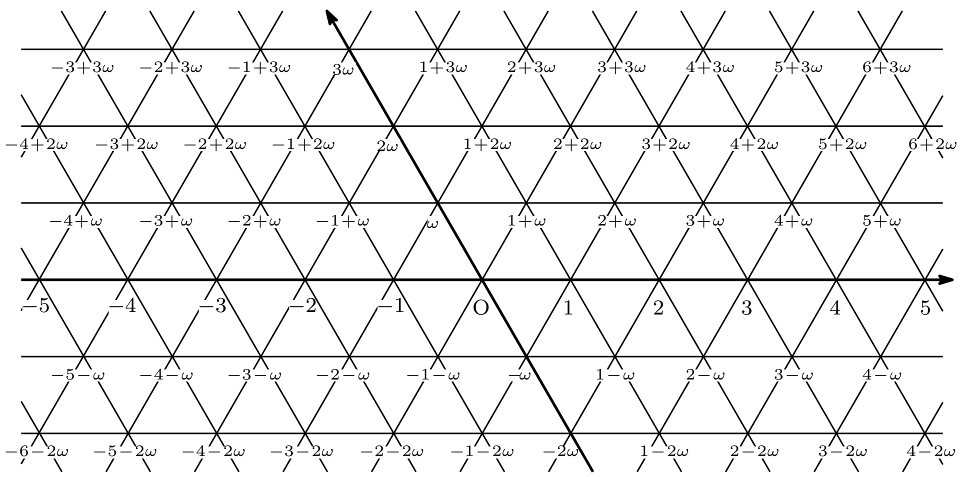
$$
\begin{aligned}
x^3-1&=0\\
(x-1)(x^2+x+1)&=0\\
x-1=0,\, x&=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2}\\
x=1,\, x&=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\\
x=1,\, \omega&=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \overline{\omega}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}
\end{aligned}
$$



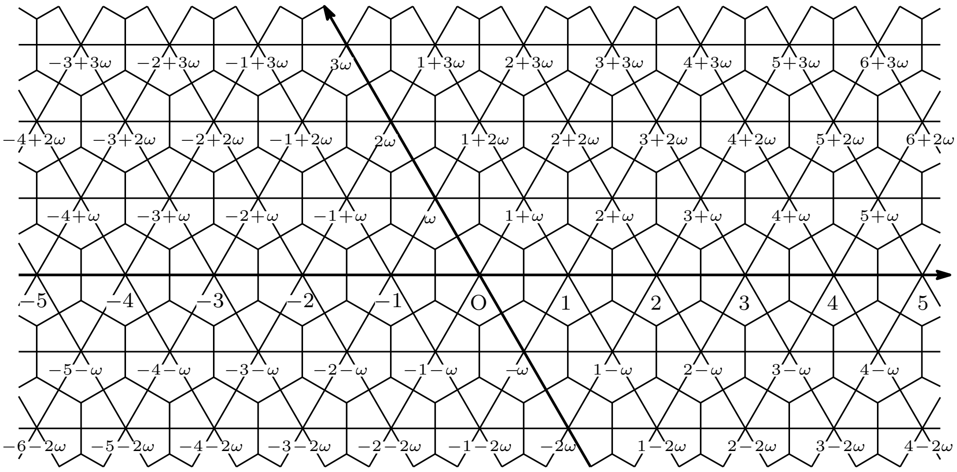
$\overline{\omega}$ は $\overline{\omega}=\omega^2=-\omega-1$ という性質があります。3 つの解を複素数平面上で表すと正三角形になり，原点は三角形の心 (内心，外心，垂心，重心) です。

6.3.2.2　ω を単位元とする複素数平面

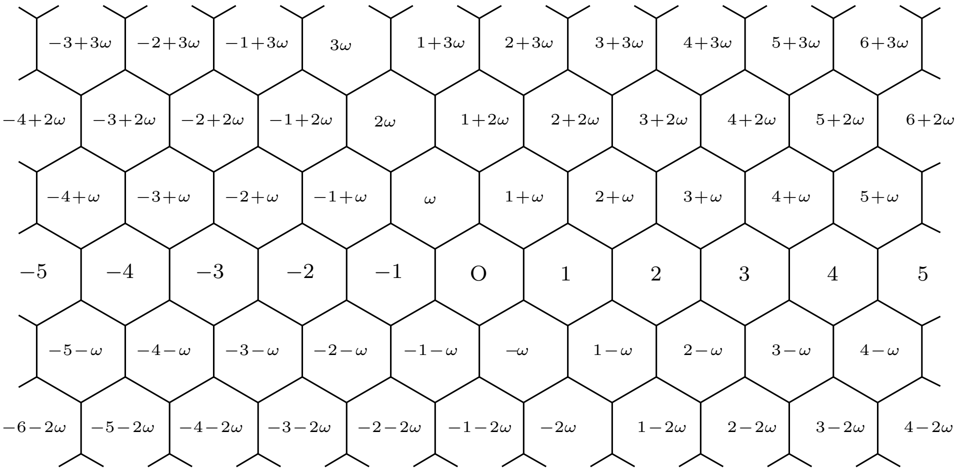
ようやく本題である，複素数平面上は ω，実数軸上は 1 を単位元とする世界はどうなっているのだろう？



上のように ω を単位元とする複素数平面は正三角形を敷き詰めた 60° の世界です。通常の座標平面は正方形のマス目で敷き詰められるが，この複素数平面は正六角形の蜂の巣の模様で敷き詰められる。



蜂はωを知っているのだろうか。これを使うと蜂の一個一個の部屋へ異なる名前をつけることが可能になり，その部屋がどこにあるのかも部屋の名前ですぐわかる。



この世界でも通常の複素数平面と同様に格子状の点，それぞれの世界において整数とみることができる数は加減と乗法は閉じています。

a,b,c,dを整数としたとき

$$\begin{aligned}
(a+b\omega)+(c+d\omega) &= (a+c)+(b+d)\omega\\
(a+b\omega)-(c+d\omega) &= (a-c)+(b-d)\omega\\
(a+b\omega)(c+d\omega) &= ac+(ad+bc)\omega+bd\omega^2\\
\omega^2=-\omega-1\ \text{より} &\\
&= (ac-bd)+(ad+bc-bd)\omega
\end{aligned}$$

ではωを単位元とする複素数平面と虚数iを単位元とする通常の複素数平面とでは何が違うのでしょう？ 以下では通常の複素数平面をガウス平面といいます。実数の範囲では因数分解できない素数がガウス平面では可能です。といっても$4n+1$型の素数です。時計上に並べたペーター・プリヒタの素数円では2と1時と5時の方向の素数です。この素数は具体的にあげると

2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, ……(整数列大辞典 A002313) ですが，実数の範囲では自身以外の素因数をもたない素数がガウス平面では

$$
\begin{aligned}
5 &= (2+i)(2-i) = (1+2i)(1-2i) \\
13 &= (3+2i)(3-2i) = (2+3i)(2-3i) \\
17 &= (4+i)(4-i) = (1+4i)(1-4i)
\end{aligned}
$$

と整数係数の 2 つの複素数の積に分解されてしまうのです。(Wikipedia では「二個の平方数の和」の頁に説明があります。)

　では ω を単位元とする複素数平面ではどうなるのでしょう。今度は $3n{+}1(6n{+}1)$ 型の素数，ペーター・プリヒタの素数円では 3 と 1 時と 7 時の方向の素数 3, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, 103, ……(整数列大辞典 A007645) が ω を用いて積の形で表すことができるのです。やってみましょう。

$$
\begin{aligned}
7 &= (3+\omega)(3+\overline{\omega}) \\
&= 9 + 3\omega + 3\overline{\omega} + \omega\cdot\overline{\omega} \\
&= 9 + 3(\omega+\overline{\omega}) + \omega\cdot\overline{\omega} \\
\overline{\omega} &= \omega^2,\ \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1 \text{ より} \\
&= 9 + 3\times(-1) + 1 \\
&= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
13 &= (3-\omega)(3-\overline{\omega}) \\
&= 9 - 3\omega - 2\overline{\omega} + \omega\cdot\overline{\omega} \\
&= 9 - 3(\omega+\overline{\omega}) + \omega\cdot\overline{\omega} \\
\overline{\omega} &= \omega^2,\ \omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1 \text{ より} \\
&= 9 - 3\times(-1) + 1 \\
&= 13
\end{aligned}
$$

6.3.2.3　万華鏡の世界

　これ以降は ω を単位元とする複素数平面を万華鏡の世界とよぶことにします。数学セミナーではこの後図形の世界の話題になってしまった。もう少し数の世界での性質について考えてみたい。ガウス平面においては $4n+1$ 型の素数が複素数の積で表され，それ以外の素数 ($4n+3$ 型) は表すことができなかった。どうしてだろうか？ 計算してみよう。

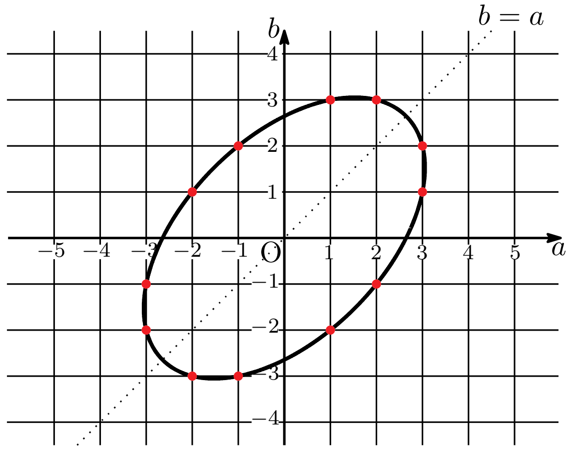
$$
\begin{aligned}
N &= (a+bi)(a-bi) \\
&= a^2 - b^2 i^2 \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}
$$

よってある素数が 2 つの整数の平方和で表すことができればガウス平面では素数ではなくなる。そして素数が 2 つの整数の平方和で表せるのは $4n+1$ 型の素数である。そして 2 つの数の平方和は 2 つの数の大小関係を無視すれば 1 通りしかないことから，ガウス平面では 5 は $5 = 1^2 + 2^2$ から素数ではなくかわりに $2+i$, $2-i$, $1+2i$, $1-2i$ が素数になる。

　では万華鏡の世界ではどうなっているのだろうか。

$$
\begin{aligned}
N &= (a+b\omega)(a+b\overline{\omega}) \\
&= a^2 + ab(\omega+\overline{\omega}) + b^2\omega\overline{\omega} \\
\overline{\omega} &= \omega^2,\ \omega+\overline{\omega} = -1,\ \omega^3 = 1 \text{ より} \\
&= a^2 - ab + b^2
\end{aligned}
$$

よって $N = a^2 - ab + b^2$ を満たす整数があれば積の形で表されることが分かる。ここで $N = 7$ としたときこの式を満たす a, b の解を座標平面で表してみた。



今求めている a, b ともに整数となる値を**赤点**で示した。求める式は対称式であるので a, b の値は直線 $b = a$ を対称軸として線対称になっている。書き並べてみると

$$(\pm 1,\ \pm 3),\ (\pm 1,\ \mp 2),\ (\pm 2,\ \pm 3),\ (\pm 2,\ \mp 1),\ (\pm 3,\ \pm 1),\ (\pm 3,\ \pm 2)\quad \text{(複合同順)}$$

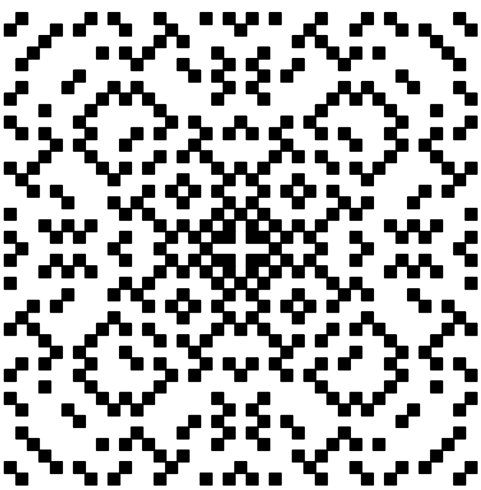
になる。このことから万華鏡の世界では 3 と $3n+1(6n+1)$ 型の素数が素数でなくなり，新たにこれらの数が素数に加えられる。

なお $N = 7$ の式において $7 = (3+\omega)(3+\overline{\omega})$ は $\overline{\omega} = -\omega - 1$ に置き換えると $7 = (3+\omega)(2-\omega)$ と変形できることを付け加えておく。また整数列大辞典に $x^2 - xy + y^2$ で表せない数があった。具体的には $6n-1$ 型の素数を含めると 2, 5, 6, 8, 10, 11, 14, 15, 17, 18, 20, ……(整数列大辞典 $A034020$) である。整数列大辞典においては式が $x^2 + xy + y^2$ になっている。これは定義の式を $N = (a-\omega)(b-\overline{\omega})$ とした場合である。異なっているようだが式の特徴から対称性があるためどちらを基準にしても同じことである。例えば上の $a^2 - ab + b^2 = 7$ と $a^2 + ab + b^2 = 7$ の解の違いは b 軸を対称軸としたグラフの関係になる。

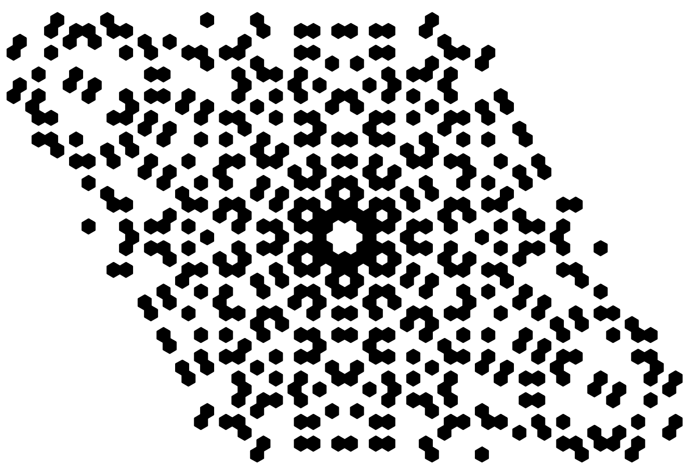
6.3.2.4　複素数平面上の素数分布

最後にガウス平面での素数表示に面白い幾何学的な特徴があることを知っていたので，この万華鏡の世界での素数分布も調べてみた。

ガウス平面の素数分布



万華鏡の世界の素数分布



上記の表示はプログラムで実数の範囲での素数を $N = a^2 + b^2$ と $N = a^2 - ab + b^2$ の形になるそれぞれの世界での素数を求め，■表示で塗りつぶした複素数平面である。ただし万華鏡の世界は正六角形で塗りつぶした。どちらも中央が 0 で，その横軸が実数軸である。実数軸の範囲はどちらも -20〜20 で作成した。数が作る幾何学模様の美しさを生徒たちにも紹介してあげて欲しい。特に万華鏡の世界の素数分布は首を右に傾けて見ると，UFO みたいな奇妙な形に見えたり，単独の点を目と鼻と考えると中央の帽子をかぶった人の姿なんかを発見できると楽しくなる。ガウス平面上での素数は「ガウス素数」，万華鏡の世界での素数は「アイゼンシュタイン素数」という。両方の世界において厳密な素数の定義は授業には必要ないと思い書かなかったが概要は充分に伝えたつもりである。最後に万華鏡の世界として紹介されていた数学セミナーの漫画が面白かったので載せますね。ただ 2 つの世界で両方ともできる 13 の子を付け加えたいなぁ〜。

(参考文献 : 数学セミナー 1997 年 6 月号)