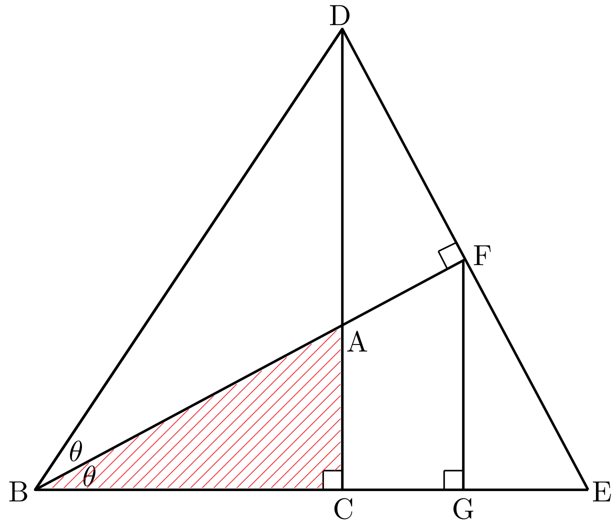
3.4.4　三角関数の倍角公式

教科書には記述がない三角関数の倍角公式が直角三角形の角の二等分線を利用して意外と簡単に求めることができることをみつけたので書き留めておきます。三角比の正接の倍角の公式は覚えていますか？ 以下の公式です。

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

この公式を図形から求めていきます。



左の図は △ABC を基準に新たに ∠B = 2θ の直角三角形 DBC を作った図です。BC を延長し BD = BE なる点 E をとり，点 D と結びます。BA の延長線と DE との交点を F，点 F から BE へ垂線を降ろし交点を G とします。

△BED は ∠B を頂角とする二等辺三角形です。二等辺三角形において頂角の二等分線と垂線および中線は一致します。また直角三角形において直角の頂点から斜辺に降ろした垂線は自身と相似な三角形 2 つに分割します。このことより △ABC, △FBG, △EFG はすべて相似です。

ここで基準の △ABC の底辺 BC を a，高さ AC を b とします。この a, b を使って △DBC の DC が表せれば $\tan 2\theta$ が $\tan\theta$ で表せます。CG = k とし，やってみましょう。

△EDC において FG//DC と EF = FD と平行線と比の性質から

$$\mathrm{EG} : \mathrm{GC} = \mathrm{EF} : \mathrm{FD} = 1 : 1$$

△ABC ∽ △FBG より　$a : b = (a+k) : \mathrm{FG}$

$$\mathrm{FG} = \frac{b(a+k)}{a}$$

△ABC ∽ △EFG より　$a : b = \mathrm{FG} : \mathrm{EG}$

$$a : b = \frac{b(a+k)}{a} : k$$

$$k = \frac{ab^2}{a^2-b^2}$$

また DC = 2FG より　$\mathrm{DC} = 2\dfrac{b(a+k)}{a} = 2\dfrac{b\left(a+\dfrac{ab^2}{a^2-b^2}\right)}{a} = \dfrac{2a^2b}{a^2-b^2}$

これより　$\tan 2\theta = \dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\dfrac{2a^2b}{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{2ab}{a^2-b^2} = \dfrac{2\dfrac{b}{a}}{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

思ってた以上に簡単でしょ。生徒はテストの証明は嫌いだけど，授業中の証明は意外と考えてくれますよ。場面設定だけしっかり生徒に説明してあげれば取り組むことが可能だと思います。ピタゴラスの定理もそうだったけど，直角三角形の直角から降ろした垂線を用いた証明は頻繁に出現しますね。