8.8　高校数学外伝 VIII「どうして正七角形は作図できないの？」

S_1「先生，昨日ちょっと調べていたら数学者ガウスは 19 歳の時に正十七角形が作図できることを証明したってあったんだけど，19 歳って私たちと 1 つしか違わないじゃん。正十七角形はあんまり興味ないからいいんだけど，どうして正七角形は作図できないの？」

T「う〜ん。簡単にいうと正多角形の頂点は同一円周上にある。正多角形の頂点と外接円の中心とを結んでできる $\dfrac{360^\circ}{7}$ の角が作図できないんだ。」

S_1「それって，$\dfrac{360^\circ}{7}$ は作図できなくて $\dfrac{360^\circ}{17}$ は作図できるってこと？」

T「その通り。」

S_1「でも先生，$\dfrac{360^\circ}{7}$ ができなくて，$\dfrac{360^\circ}{17}$ ができるって何かおかしくない？」

T「それはね，7 と 17 は素数ということでは共通しているんだけど，同じ素数でも 1 つ減らした 6 と 16 の違いに秘密があるんだ。」

S_1「6 ができなくて，16 ができるってこと？」

T「6 と 16 の違いがわかれば正多角形の作図の秘密に近づくことができるよ。」

S_1「6 と 16 の違い？ 6 は 2×3 で，16 は 2^4 だけど……。」

S_2「この前の WBC で背番号 6 の選手はいなかったけど，背番号 16 は大谷選手だったってことに関係しているんじゃない？」

S_1「もう〜，チャチャ入れないの！ 私はまじめに聞いているんだから。」

T「今の分析はあってるよ。6 次式は (3 次式)×(3 次式) の形になる。でも 16 次式は (8 次式)×(8 次式)，そして 8 次式は (4 次式)×(4 次式)，4 次式は (2 次式)×(2 次式) になって，2 次式の解法で解くことができるんだ。」

S_1「ふ〜ん。でも先生それなら 6 次式は (2 次式)×(2 次式)×(2 次式) の形にもできるんでしょ。同じことじゃん。」

T「6 次式を 2 次式 3 つの積の形にしようとすると，その 3 つの式の係数を求めるために 3 次方程式を解かなくてはいけないんだ。3 次式 2 つの積の形にすると，今度はその 3 次方程式を解かなくてはいけないんだ。作図は 2 次方程式までだったら解くことできるけど，3 次方程式は解くことができないんだ。」

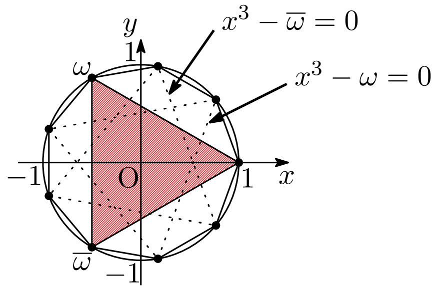
S_1「でも先生，作図できない 2 番目の正多角形は正九角形だったよ。正九角形も同じことなの？」

T「正九角形なら今の君たちにもどうしてできないかがわかると思うよ。$x^9 - 1 = 0$ を解くことができるか挑戦してごらん。」

S_1「もう〜変なことに首突っ込んじゃった〜。しょうがないなぁ〜，やってみましょう。$x^3 = X$ とすると，えっ因数分解できるじゃん。」

$$
\begin{aligned}
x^9 - 1 &= 0 \\
x^3 = X \text{ とおくと} & \\
X^3 - 1 &= 0 \\
(X-1)(X^2+X+1) &= 0 \\
X = 1,\ X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} & \\
X = 1,\ X = \omega,\ X = \overline{\omega} & \\
x^3 = 1,\ x^3 = \omega,\ x^3 = \overline{\omega} &
\end{aligned}
$$

S_1「$x^3=1$ は簡単だけど，$x^3=\omega$ ってこれどうやって解くの〜。そうかできないことを感じればいいんだから，これを解くには 3 次方程式を解かなければいけないということなんだ。」



S_1 「先生，正九角形ができないことわかったよ。3 つの頂点はわかるけど，残りの 6 つがわからないってことでしょ。」

T 「がんばったね。その通り。正九角形の中には正三角形が 3 つある。1 つは簡単に求めることができるんだけど，残りの 2 つの正三角形の頂点の位置を求めようとしたときに 3 次方程式がでてきてしまうんだ。」

S_1「先生，正十七角形を求めることができる 2 次方程式ってどんな形しているの？」

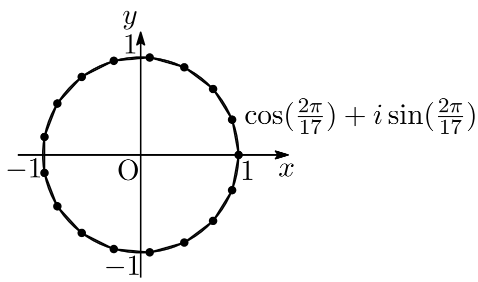
T 「えっ。」

S_1「私たちにも解くことできる？」

T 「それは……。また今度紹介するよ。」

8.8.1 正十七角形の頂点の座標を求めるための 2 次方程式

これ以降はどんな 2 次方程式なのかを生徒に紹介するために示した計算式のみです。立式の仕方は参考文献を参照してください。



$$x^2+x-4=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\alpha_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ ,\ \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$y^2-\alpha_1 y-1=0\ ,\ y^2-\alpha_2 y-1=0$$

$$\beta_1=\frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2+4}}{2}\ ,\ \beta_2=\frac{\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+4}}{2}$$

$$z^2-\beta_1 z+\beta_2=0\ ,\ z^2-\beta_2 z+\beta_1=0$$

$$\gamma_1=\frac{\beta_1+\sqrt{\beta_1^2-4\beta_2}}{2}\ ,\ \gamma_2=\frac{\beta_2+\sqrt{\beta_2^2-4\beta_1}}{2}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1&=\frac{-1+\sqrt{17}}{8}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17+3\sqrt{17}}{4}-\sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}}}\\&=\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right)\end{aligned}$$

$$w^2-\gamma_1 w+\gamma_2=0$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)&=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right)\\&=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right)\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)=\frac{1}{8}\sqrt{2(17-\sqrt{17})+2\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}+\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

複素数平面の単位円周上に頂点がある正十七角形において $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ が $(1, 0)$ に続く左回りの最初の頂点の座標です。(参考文献 : 数学セミナー 1992 年 9 月号)