5.1.2 無限多重根号

無限という言葉は数学 I から無限集合という言葉で登場しますが，正式に ∞ という記号は数学 III の「数列の極限」で新出しています。無限がらみで生徒が知っているルートを用いた無限多重根号に触れさせるのもありかなって思いました。

5.1.2.1 平方根の無限多重根号

平方根を使った無限多重根号です。

$$6=\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\cdots}}},\quad 6=\sqrt{42-\sqrt{42-\sqrt{42-\cdots}}}$$

$$n=\sqrt{A\pm n}$$

両辺 2 乗して

$$n^2=(\sqrt{A\pm n})^2$$

$$n^2=A\pm n$$

$$A=n^2\mp n$$

$$A=n(n\mp 1)$$

n	$n(n-1)$	$n(n+1)$	n	$n(n-1)$	$n(n+1)$
1		2	6	30	42
2	2	6	7	42	56
3	6	12	8	56	72
4	12	20	9	72	90
5	20	30	10	90	110

ここに登場する $n(n\mp 1)$ という数は矩形数（くけい）といい，連続する整数の積で，三角数の 2 倍の数です。授業として書くと

問. $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\cdots}}}$ はいくつになるのだろう？

$x=\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\cdots}}}$ として計算できるのだろうか？

そして

$x=\sqrt{30+x}$

とすればいいことに気づかせば生徒の力で計算できます。次の発問は

問. $6=\sqrt{A-\sqrt{A-\sqrt{A-\cdots}}}$ が成り立つ A はいくつだろう？

といえば，さらに理解が深まると思います。数学教員は無限の考え方がわかっているのでそんなこと当たり前だろって感じますが，生徒にとっては今までとは少し異なる立式の仕方ですので多少の訓練が必要です。

5.1.2.2 立方根の無限多重根号

立方根を使った無限多重根号です。平方根の無限多重根号で理解が進めばあとは意外と簡単です。

$$2=\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots}}},\quad 2=\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{10-\sqrt[3]{10-\cdots}}}$$

$n=\sqrt[3]{A\pm n}$ から $A=n^3\mp n=n(n^2\mp 1)$

n	$n(n^2-1)$	$n(n^2+1)$	n	$n(n^2-1)$	$n(n^2+1)$
1		2	6	210	222
2	6	10	7	336	350
3	24	30	8	504	520
4	60	68	9	720	738
5	120	130	10	990	1010

$n(n^2-1)=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ よりこの数は 3 連続整数の積です。m 乗根は $n^m \pm n$ の数です。

5.1.2.3　ラマヌジャンの無限多重根号

インドの数学者ラマヌジャン(1887-1920)は以下の式を雑誌に投稿しました。

$$x=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots}}}}}$$

美しい式ですね。x がいくつかわかりますか？ $x=3$ になります。この式を一般化するには多少の苦労が必要です。

$$\{F(x)\}^2=1+xF(x+1)$$
$$F(x)=\sqrt{1+xF(x+1)}$$
$$F(x)=\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{1+(x+3)\sqrt{\cdots}}}}}$$

ここで $x=2$ とおくと

$$F(2)=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{\cdots}}}}}$$

よって $\{F(x)\}^2=1+xF(x+1)$ を満たす関数がわかれば求められます。

ここで上記の式の左辺と右辺の x の次数を比べると $F(x)$ は 1 次式ということがわかります。

$F(x)=ax+b$ とすると

$$(ax+b)^2=1+x\{a(x+1)+b\}$$
$$a^2x^2+2abx+b^2=ax^2+(a+b)x+1$$
$$(a^2-a)x^2+(2ab-a-b)x+b^2-1=0$$
$$a^2-a=0,\ 2ab-a-b=0,\ b^2-1=0$$

$a \fallingdotseq 0$ より

$$a=1\ ,\ b=1$$
$$F(x)=x+1$$

よって　$F(2)=2+1=3$

Wikipedia の式から自分なりに少し変形しました。

5.1.2.4　連分数

無限つながりで連分数もいいなって感じました。一般式は $x=2+\dfrac{1}{x}$ です。

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}$$