5.1.3　特異数字列になる分数　〜小数と無限級数〜

5.1.3.1　入門編 $\dfrac{1}{3}$

ほとんどの生徒ができて欲しいですが……

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0.3333\cdots \\ &\text{両辺を 3 倍します。} \\ \frac{1}{3}\times 3 &= 0.3333\cdots\times 3 \\ 1 &= 0.9999\cdots \end{aligned}$$

上の式でどこがおかしいですか？

数学教師の皆さんは上の式は正しい式だということは理解していると思います。生徒は上手に説明できるかなぁ？

(1) 数学で等しいかどうかは差で判断します。$A-B=0$ のとき $A=B$ です。

$$1-0.999\cdots = 0.000\cdots$$

(2) 初項 0.3, 公比 0.1 の無限等比級数の極限値として求めることもできます。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0.3(1-0.1^n)}{1-0.1} = \frac{0.3}{0.9} = \frac{1}{3}$$

このことに加えて「この式は見かけにごまかされてはダメっていうことを教えてくれているんだよ。」って伝えてください。$\sqrt{9}=3$ と同じことだよって。

5.1.3.2　基礎編 $\dfrac{1}{49}$

分数を小数で書き表したとき特異な数字列になる数があります。

$$\frac{1}{49} \fallingdotseq 0.020408163265306122448979591836734693877551\cdots$$

$$\begin{array}{r}
0.02\\
04\\
08\\
16\\
32\\
64\\
128\\
256\\
512\\
1024\\
2048\\
\hline
0.02040816326530612244\cdots
\end{array}$$

$\dfrac{1}{49}$ は循環節 42 の循環小数ですが，2 の累乗数が順に出現します。これは $\dfrac{1}{49}$ が初項 0.02，公比 0.02 の無限等比級数の極限値だからです。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0.02(1-0.02^n)}{1-0.02} = \frac{0.02}{0.98} = \frac{1}{49}$$

5.1.3.3　発展編 $\frac{1}{89}$

数学 B の「数列」でフィボナッチ数列を指導したと思います。その数列の貴重さを知っていれば次の分数の不思議さを感じることができます。

$$\frac{1}{89} \fallingdotseq 0.011235955056179775280898876404494382022471 91\cdots$$

$$\begin{array}{l}
0.01 \\
\quad\;\; 1 \\
\quad\;\;\; 2 \\
\quad\;\;\;\; 3 \\
\quad\;\;\;\;\; 5 \\
\quad\;\;\;\;\;\; 8 \\
\quad\;\;\;\;\;\; 13 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\; 21 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\; 34 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;\; 55 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 89 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; 144 \\
\hline
0.01123595505\cdots
\end{array}$$

どうしてこのような数字列になるのかは無限級数をつかうと解決します。フィボナッチ数列の第 n 項を a_n とし公比 r を $\frac{1}{10}$ としたとき,

$$S_n = a_1r^2 + a_2r^3 + a_3r^4 + a_4r^5 + \cdots + a_nr^{n+1} \quad \cdots\cdots ①$$
$$rS_n = a_1r^3 + a_2r^4 + a_3r^5 + a_4r^6 + \cdots + a_nr^{n+2} \quad \cdots\cdots ②$$
$$r^2S_n = a_1r^4 + a_2r^5 + a_3r^6 + a_4r^7 + \cdots + a_nr^{n+3} \quad \cdots\cdots ③$$

① − ② − ③より

$$(1-r-r^2)S_n = a_1r^2 + a_2r^3 - a_1r^3 + \sum_{k=3}^{n}(a_k - a_{k-1} - a_{k-2})r^{k+1} - a_nr^{n+2} - a_{n-1}r^{n+2} - a_nr^{n+3}$$

ここで $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$ より $a_k - a_{k-1} - a_{k-2} = 0$，また $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ より $a_2r^3 - a_1r^3 = 0$

$$\begin{aligned}(1-r-r^2)S_n &= a_1r^2 - a_nr^{n+2} - a_{n-1}r^{n+2} - a_nr^{n+3} \\ &= a_1r^2 - a_{n+1}r^{n+2} - a_nr^{n+3}\end{aligned}$$

よって　$$S_n = \frac{1}{1-r-r^2}(a_1r^2 - a_{n+1}r^{n+2} - a_nr^{n+3})$$

$n \to \infty$ のとき $a_nr^{n+1} \to 0$ より

$$S = \frac{a_1r^2}{1-r-r^2}$$

この式に $a_1 = 1,\ r = \frac{1}{10}$ を代入すると

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1 - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100}} = \frac{1}{89}$$

$r = \frac{1}{100}$ としたときは

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{100}\right)^2}{1 - \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100} - \frac{1}{10000}} = \frac{1}{9899}$$

$$\frac{1}{9899} \fallingdotseq 0.000101020305081321345590463683200323264976260228305889483786 24\cdots$$

$\frac{1}{9899}$ は循環節 468 の循環小数です。(参考文献 : 数学セミナー 2004 年 9 月号「$\frac{1}{89}$ の不思議」)

5.1.3.4 応用編 $\dfrac{1}{243}$

分数を小数で書き表したとき特異な数字列になる第 3 弾です。

$$\frac{1}{243} \fallingdotseq 0.004115226337448559670781893004 11\cdots$$

$$\begin{array}{r}
0.004 \\
115 \\
226 \\
337 \\
448 \\
559 \\
670 \\
781 \\
892 \\
1003 \\
1114 \\
\hline
0.004115226337448559670781893004 11\cdots
\end{array}$$

上の小数は循環節 27 の循環小数ですが，3 桁ごとに区切ると公差 111 の等差数列になっています。ファインマン (1918-1988) の著作で"quite cute"(かなりかわいい) と指摘しています。これも考察してみましょう。

等差数列の初項を a_1，公差を d，一般項を a_n とすると

$$S_n = \frac{a_1}{1000} + \frac{a_2}{1000^2} + \frac{a_3}{1000^3} + \frac{a_4}{1000^4} + \cdots + \frac{a_n}{1000^n} \quad \cdots\cdots ①$$

$$1000S_n = a_1 + \frac{a_2}{1000} + \frac{a_3}{1000^2} + \frac{a_4}{1000^3} + \cdots + \frac{a_n}{1000^{n-1}} \quad \cdots\cdots ②$$

② − ①より

$$\begin{aligned}
999S_n &= a_1 + \frac{a_2 - a_1}{1000} + \frac{a_3 - a_2}{1000^2} + \frac{a_4 - a_3}{1000^3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{1000^{n-1}} - \frac{a_n}{1000^n} \\
&= a_1 + \frac{d}{1000} + \frac{d}{1000^2} + \frac{d}{1000^3} + \cdots + \frac{d}{1000^{n-1}} - \frac{a_1 + (n-1)d}{1000^n} \\
&= a_1 + d\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \frac{1}{1000^3} + \cdots + \frac{1}{1000^n}\right) - \frac{a_1 + nd}{1000^n} \\
&= a_1 + d \cdot \frac{\dfrac{1}{1000}\left(1 - \left(\dfrac{1}{1000}\right)^n\right)}{1 - \dfrac{1}{1000}} - \frac{a_1 + nd}{1000^n} \\
&= a_1 + \frac{d}{999}\left(1 - \left(\frac{1}{1000}\right)^n\right) - \frac{a_1 + nd}{1000^n}
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき

$$999S = a_1 + \frac{d}{999}$$

この $\dfrac{nd}{1000^n}$ の形の極限は教科書にはない形なので，授業で扱うときには簡単に解説してあげてください。

$a_1 = 4$, $d = 111$ を代入すると

$$999S = 4 + \frac{111}{999}$$

$$999S = 4 + \frac{1}{9}$$

$$S = \frac{37}{9} \cdot \frac{1}{999} = \frac{1}{243}$$

正体がわかると気分がスッキリすると思いませんか？

(参考文献 : 数学セミナー 2000 年 2 月号「冗談の解読」)

5.1.3.5　探求編 $\dfrac{a}{1-r}$

ここでは基礎編の $\dfrac{1}{49}$ で出現した無限等比級数の極限値を表す $\dfrac{a}{1-r}$ で遊んでみましょう。

(1) $a=r=0.04$ のときは $\dfrac{1}{24}$ になり，この分数は初項 0.04，公比 0.04 の無限等比級数の極限値です。

$$\frac{0.04}{1-0.04}=\frac{4}{96}=\frac{1}{24}\fallingdotseq 0.0416666666666666666\cdots$$

$$\begin{array}{l}
0.04\\
16\\
64\\
256\\
1024\\
4096\\
16384\\
65536\\
262144\\
\hline
0.04166666666666\cdots
\end{array}$$

(2) $a=r=0.05$ のときは $\dfrac{1}{19}$ になり，この分数は初項 0.05，公比 0.05 の無限等比級数の極限値です。

$$\frac{0.05}{1-0.05}=\frac{5}{95}=\frac{1}{19}\fallingdotseq 0.052631578947368421\cdots$$

$$\begin{array}{l}
0.05\\
25\\
125\\
625\\
3125\\
15625\\
78125\\
390625\\
1953125\\
\hline
0.05263157894736\cdots
\end{array}$$

(3) 巡回数 142857 を作る分数で有名な $\dfrac{1}{7}$ は $\dfrac{1}{10-3}=\dfrac{0.1}{1-0.3}$ より初項 0.1，公比 0.3 の無限等比級数の極限値です。

$$\frac{1}{7}\fallingdotseq 0.1428571428571\cdots$$

$$\begin{array}{l}
0.1\\
3\\
9\\
27\\
81\\
243\\
729\\
2187\\
\hline
0.1428\cdots
\end{array}$$

最後に $\dfrac{1}{17}$ を例に分数における無限等比級数の初項と公比のみつけ方を書いておきます。

$$\frac{1}{17}=\frac{1}{20-3}=\frac{1}{20-3}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{100-15}=\frac{0.05}{1-0.15}$$

これから $\dfrac{1}{17}$ は初項 0.05，公比 0.15 の無限等比級数の極限値ということがわかります。小数というのは有限小数，無限小数ともに無限等比級数の極限値なんですね。分数を小数で表した単純な数字列が意味ある数列の和で表されることに感動しました。