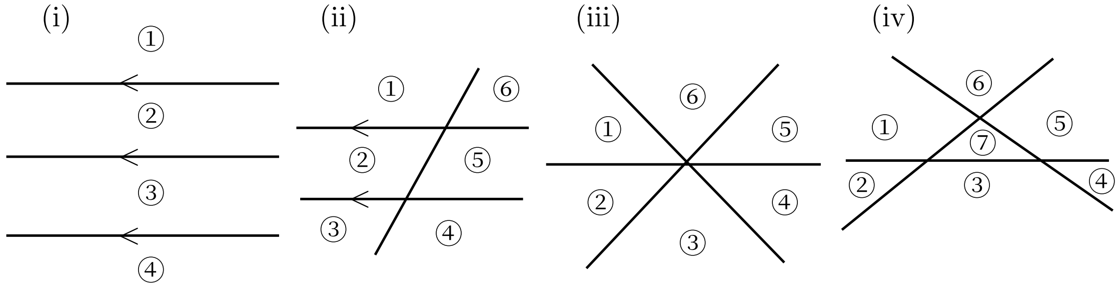
4.1.3　直線で平面を分ける領域の数

問. n 本の直線で平面を分けるとき最大何個の領域に分けることができるのだろう？

例えば 3 本の直線で平面を分ける領域は以下のようになる。

(i)　(ii)　(iii)　(iv)



位置関係の異なる 4 種類の図を考えることができるが，互いに平行でなく，異なる点で交わる直線を使ってできる限り多くの領域 (iv) に分けることを確認する。最初はデータを集め，まとめさせてから一般項 (a_n) を考えさせていく。

直線の数 (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	n
領域の数 (a_n)	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	$\cdots$	$\dfrac{n^2+n+2}{2}$
第 1 階差 (b_n)		2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	$n+1$

※階差数列を使っての求め方

$n \geqq 2$ のとき
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} \\ &= 2 + \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) \\ &= \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき成り立つので
$$a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

参考までに数研出版新編数学 B の教科書 P45 にある右のコラムを載せておく。

※漸化式を使っての求め方

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)$$

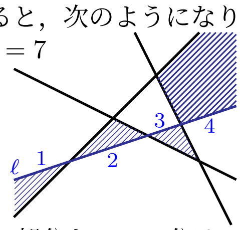
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + n \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + (n-1) \\ \cdots &= \cdots\cdots \\ a_3 &= a_2 + 3 \\ +)\quad a_2 &= a_1 + 2 \\ \hline a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \end{aligned}$$

Column　**平面の分割**

平面上に n 本の直線があります。それらのどの 2 本も平行でなく，またどの 3 本も 1 点では交わらないとします。そして, これら n 本の直線で分けられる平面の部分の個数を a_n とすると，次のようになります。

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7$$

平面が 3 本の直線で分けられているとき，右の図のように 4 本目の直線 ℓ を引くと，直線 ℓ は 3 本の直線と 3 個の点で交わり，2 つの線分と 2 つの半直線に分けられます。



これらの線分と半直線は，それらが含まれる部分を 2 つに分けるため，新しい部分は 4 個だけ増えます。すなわち，$a_4 = a_3 + 4$ となります。一般に
$$a_{n+1} = a_n + (n+1)$$
であることを導いて，a_n を求めてみましょう。

4.1.3.1　平面で空間を切り分ける領域の数

直線を平面に，平面を空間に置き換えることで，平面で空間を切り分ける領域の数に発展できる。以下の文は参考にした数学セミナーからの文である。

3 次元空間の n 枚の平面が一般の位置にあるとき，この n 枚の平面が分ける領域の個数を $f_3(n)$ と置こう。

ここで，平面を n 本の直線で分けたときと同様に，n 枚の平面のうちの 1 枚の平面に H に着目してみよう。この平面 H は他の $n-1$ 枚の平面それぞれと直線で交わっている。したがって，平面 H 上には，$n-1$ 本の直線が他の平面との交わりとして現れている。そして，少し考えると，この $n-1$ 本の直線は一般の位置にあることが分かる。一般の位置にあるので，この $n-1$ 本の直線は平面 H を $f_2(n-1)$ 個の領域に分けている。

3 次元空間を n 枚の平面が領域分割を与えている状況から平面 H を取り除いてみると，3 次元空間を $n-1$ 枚の平面が領域分割を与えている状況になり，この $n-1$ 枚の平面は一般の位置にある。したがって，この $n-1$ 枚の平面は 3 次元空間を $f_3(n-1)$ 個の領域に分割している。ここに平面 H を戻してみると，平面 H 上の直線配置における各々の領域が，$n-1$ 枚の平面配置の与えている領域分割のうちの 1 つの領域を 2 つに分割する。このことから，次の漸化式が得られる。

$$f_3(n) = f_3(n-1) + f_2(n-1)$$

ここで $f_2(n)$ というのは 2 次元の平面上で n 本の直線で分けられる領域の数である。また文中で「一般の位置」というのは領域の数を少なくしない位置のことである。この関係式から $f_3(n)$ を求めると

$$f_3(n) = f_3(0) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k^2+k+2}{2}\right) + f_2(0)$$

$f_3(0) = f_2(0) = 1$ より

$$f_3(n) = \frac{n^3+5n+6}{6}$$

になる。具体的な数は

平面の数	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	n
領域の数	1	2	4	8	15	26	42	64	$\cdots$	$\frac{n^3+5n+6}{6}$

$1, 2, 4, 8$ と 2 の等比数列が並ぶが突然に $n = 4$ のとき 15 という数が出現する。この数列の名前は"ケーキ数"といい，パスカルの三角形における左から 4 個の数の和になっている。($a_n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3$：右図参照)

直線で平面をわける領域の数はパスカルの三角形における左から 3 個の数の和で，"怠け仕出し屋の数列"というがネーミングが悪い。オンライン整数列大辞典 ($A000124$) の文の中にパンケーキを分割するとあった。"パンケーキ分割数"で統一されないかなって感じている。

パスカルの三角形

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1

人間成長してくると頭が固くなってくるが頭が柔らかいうちに考えさせることで空間のイメージを持つことができるのではと感じる。Wikipedia に平面 4 個で区切られた 15 個の領域の図があった。数学セミナーでは d 次元空間まで拡張している。参照してほしい。

(参考文献 : 数学セミナー「超平面の切り分ける領域の個数はいくつ？」2019 年 4 月号)