3.5.3 ベンフォードの法則

「ベンフォードの法則」ってご存じですか？ ある数値の最初の桁の数は1が最も多く，その先頭の桁の数が増えるごとに出現割合は徐々に減っていって，9を先頭とする数が最も少ないという法則です。確かめてみましょう。

問. 2^n において桁数を m とするとき最初の桁の数が1になるときの区間を m を用いて表しなさい。またこのときの n の範囲を m を用いて表しなさい。

$$1\times 10^{m-1} \leqq 2^n < 2\times 10^{m-1}$$

底が10の対数をとると

$$\log(1\times 10^{m-1}) \leqq \log 2^n < \log(2\times 10^{m-1})$$

$$\log 10^{m-1} \leqq n\log 2 < \log 2+\log 10^{m-1}$$

$$\frac{m-1}{\log 2} \leqq n < \frac{\log 2+m-1}{\log 2}$$

上の式から最初の桁の数が1になる区間幅は桁数 m とは関係なく1になることがわかります。同様にして最初の桁の数が2になる区間幅はどうなるのでしょう？

$$2\times 10^{m-1} \leqq 2^n < 3\times 10^{m-1}$$

底が10の対数をとると

$$\log(2\times 10^{m-1}) \leqq \log 2^n < \log(3\times 10^{m-1})$$

$$\log 2+\log 10^{m-1} \leqq n\log 2 < \log 3+\log 10^{m-1}$$

$$\frac{\log 2+m-1}{\log 2} \leqq n < \frac{\log 3+m-1}{\log 2}$$

最初の桁の数が2の区間幅は $\dfrac{\log 3-\log 2}{\log 2}$ になります。最初の桁が a になるときの区間幅を x_a としてまとめてみると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
区間幅	1	$\frac{\log 3-\log 2}{\log 2}$	$\frac{\log 4-\log 3}{\log 2}$	$\frac{\log 5-\log 4}{\log 2}$	$\frac{\log 6-\log 5}{\log 2}$	$\frac{\log 7-\log 6}{\log 2}$	$\frac{\log 8-\log 7}{\log 2}$	$\frac{\log 9-\log 8}{\log 2}$	$\frac{1-\log 9}{\log 2}$

区間幅の合計が $\dfrac{1}{\log 2}$ になることから，それぞれの区間の割合を求めてみると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
割合	$\log 2$	$\log 3-\log 2$	$\log 4-\log 3$	$\log 5-\log 4$	$\log 6-\log 5$	$\log 7-\log 6$	$\log 8-\log 7$	$\log 9-\log 8$	$1-\log 9$
近似値	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

3^n について同様にまとめ割合を求めると

区間	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
区間幅	$\frac{\log 2}{\log 3}$	$\frac{\log 3-\log 2}{\log 3}$	$\frac{\log 4-\log 3}{\log 3}$	$\frac{\log 5-\log 4}{\log 3}$	$\frac{\log 6-\log 5}{\log 3}$	$\frac{\log 7-\log 6}{\log 3}$	$\frac{\log 8-\log 7}{\log 3}$	$\frac{\log 9-\log 8}{\log 3}$	$\frac{1-\log 9}{\log 3}$

区間幅の合計が $\dfrac{1}{\log 3}$ になることから，割合は 2^n のときと同じということがわかる。

こんな問題を解かせると対数に対する理解が深まるんじゃないかなぁ〜。